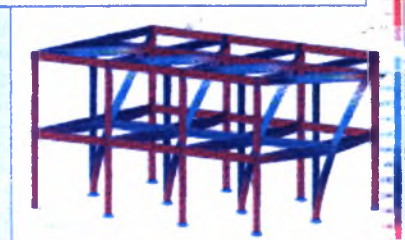
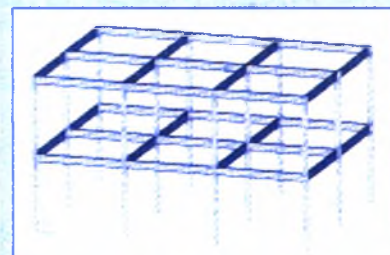
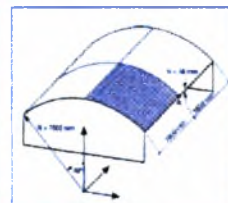
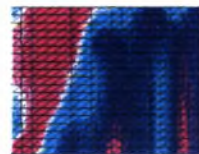
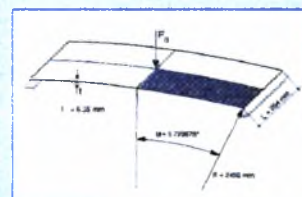
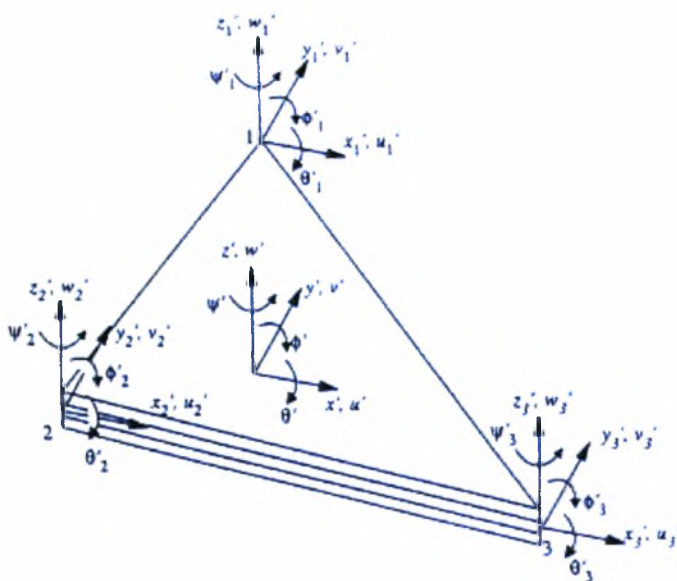




ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ TRIC. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΚΕΛΥΦΗ ΚΑΙ ΠΛΑΙΣΙΑΚΟΥΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ



Διπλωματική Εργασία

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ι. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής :

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΛΑΓΑΡΟΣ

Βόλος, Σεπτέμβριος 2004



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.:	4060/1
Ημερ. Εισ.:	26-10-2004
Δωρεά:	Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ – ΠΜ
	2004
	ΝΙΚ

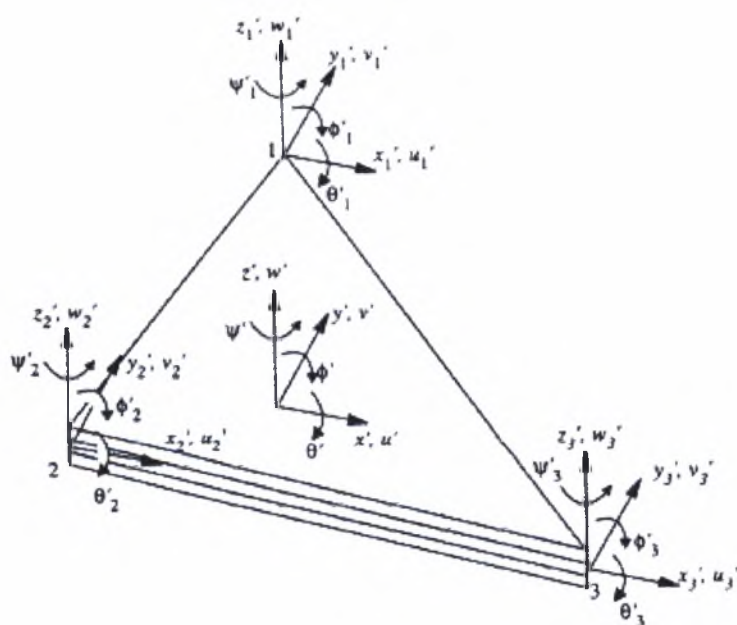
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Πολυτεχνική Σχολή – Τομέας Δομοστατικής
Τμήμα: Πολιτικών Μηχανικών



Διπλωματική Εργασία

**ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΜΕ ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ
ΣΤΟΙΧΕΙΟ TRIC. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΚΕΛΥΦΗ
ΚΑΙ ΠΛΑΙΣΙΑΚΟΥΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ**

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Ι. ΝΙΚΟΛΑΟΥ



Επιβλέπων Καθηγητής
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΛΑΓΑΡΟΣ

Βόλος, Σεπτέμβριος 2004

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
Εισαγωγή.....	vi
Κεφάλαιο 1	
Εισαγωγή στη Μέθοδο των Πεπερασμένων.....	1
1.1 Ιστορική Αναδρομή της Μεθόδου.....	1
1.2 Γεωμετρία και Φόρτιση του Φορέα	4
1.3 Τάσεις και Παραμορφώσεις	6
1.4 Αρχή Δυνατών Έργων	7
1.5 Σχέσεις Ανηγμένων Παραμορφώσεων-Μετατοπίσεων (Κινηματικές Σχέσεις)	9
1.6 Σχέσεις Τάσεων - Ανηγμένων Παραμορφώσεων (Καταστατικός νόμος του υλικού)....	12
1.7 Διατύπωση Εξίσωσης Ισορροπίας.....	14
1.7.2 Συναρτήσεις Σχήματος Πεπερασμένου Στοιχείου.....	14
1.7.2 Μητρώα Παραμορφώσεως Στοιχείου.....	16
1.7.3 Εξισώσεις Ισορροπίας με επικόμβια φορτία.....	17
1.7.4 Ισοδύναμες Δράσεις Μαζικών και Επιφανειακών Δυνάμεων.....	19
1.7.5 Ισοδύναμες Δράσεις αρχικών τάσεων και αρχικών παραμορφώσεων.....	20
1.7.6 Γενική Εξίσωση Ισορροπίας Φορέα και Στοιχείων.....	22
Κεφάλαιο 2	
Φυσικές μορφές πεπερασμένων στοιχείων (natural mode method)	25
2.1 Η προσέγγιση του προβλήματος με τη μέθοδο των φυσικών μορφών	25
2.2 Το Φυσικό μητρώο ακαμψίας.....	26
2.3 Φυσικές μορφές για επιλεγμένα στοιχεία	32

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Αναλυτικού Υπολογισμού Παχιών και Λεπτών Κελυφών.....	39
3.1 Είδη Κελυφών.....	25
3.2 Εντατική Κατάσταση Κελυφών	44
3.3 Πεπερασμένα Στοιχεία Κελύφους.....	45
3.4 Σχεδιασμός και Ανάλυση Κελυφών	46

Κεφάλαιο 4

Γραμμική Ελαστική Ανάλυση Τριγωνικού Στοιχείου Κελύφους TRIC.....	48
4.1 Το τριγωνικό Στοιχείο TRIC.....	48
4.2 Κινηματικές σχέσεις στο φυσικό σύστημα.....	50
4.3 Τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις στο φυσικό σύστημα.....	51
4.4 Καταστατικές σχέσεις.....	60
4.5 Εντατικά μεγέθη – Εξισώσεις ισορροπίας.....	69
4.6 Φυσικές μορφές – Φυσικό μητρώο ακαμψίας	72
4.7 Συνολική παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα	79
4.7.1 Παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα λόγω αξονικών και συμμετρικών καμπτι- κών μορφών.....	79
4.7.2 Παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα λόγω αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών	82
4.8 Όροι ακαμψίας λόγω αξονικής παραμόρφωσης και συμμετρικής κάμψης.....	87
4.9 Μητρώο ακαμψίας λόγω αντισυμμετρικών μορφών	91
4.9.1 Μητρώο ακαμψίας λόγω αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών	92
4.9.2 Μητρώο ακαμψίας λόγω αντισυμμετρικών διατμητικών μορφών	93
4.9.3 Συντελεστής διατμητικής διόρθωσης.....	96
4.10 Αξιμούθιο μητρώο ακαμψίας	99
4.11 Τοπικό και καθολικό καρτεσιανό μητρώο ακαμψίας	104
4.12 Υπολογισμός τάσεων και εντατικών μεγεθών	111
4.12.1 Υπολογισμός εντατικών μεγεθών.....	111
4.12.2 Υπολογισμός τάσεων κατά το πάχος του στοιχείου.....	112

4.13	Κινηματικά ισοδύναμα επικόμβια φορτία	116
------	---	-----

Κεφάλαιο 5

Εισαγωγή στην Μη Γραμμική Ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία		118
5.1	Αναγκαιότητα και ιδιαιτερότητες της μη γραμμικής ανάλυσης.....	118
5.2	Μη γραμμική Ανάλυση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων	120
5.3	Είδη και κατηγοριοποίηση των μη γραμμικών προβλημάτων.....	122
5.4	Η μέθοδος Newton-Raphson	126
5.5	Μαθηματική Διατύπωση της μεθόδου Newton-Raphson	127
5.6	Διατύπωση της μεθόδου Newton-Raphson για πολυβάθμια συστήματα	129
5.7	Κριτήρια Σύγκλισης.....	132
5.8	Μη Γραμμικότητα του Υλικού.....	134
5.9	Μοντέλα Συμπεριφοράς του Υλικού.	134
5.9.1	Γραμμικό Ελατήριο.....	134
5.9.2	Μη Γραμμικό Ελατήριο.....	135
5.9.3	Ελαστική διατύπωση Green.....	136
5.9.4	Μοντέλο Τριβής St.Venant.....	137
5.10	Σύνθετα Μοντέλα	138
5.11	Ελαστοπλαστικό Μοντέλο.....	139
5.12	Μη γραμμικά μοντέλα πολυαξονικής έντασης.....	141
5.13	Γενίκευση της μονοαξονικής διαρροής σε τριαξονική διαρροή.....	145
5.14	Κριτήριο διαρροής von Mises	146
5.15	Πλαστική ροή.....	147
5.16	Η μέθοδος Μήκους Τόξου.....	152
5.17	Γενικές παρατηρήσεις μη γραμμικής ανάλυσης.....	156

Κεφάλαιο 6

Μη γραμμική Ανάλυση με το στοιχείο TRIC		158
6.1	Ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο στο φυσικό σύστημα.....	158

6.2	Ισοδύναμη τάση διαρροής και διάνυσμα πλαστικής ροής στο φυσικό σύστημα	163
6.2.1	Ισοδύναμη τάση διαρροής	163
6.2.2	Πλαστικό διάνυσμα ροής	165
6.3	Μαθηματική διαδικασία ελαστοπλαστικής ανάλυσης.....	165
6.4	Εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας	169
6.5	Ανεύρεση καμπύλης φορτίου-μετατόπισης.....	171
6.5.1	Μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc-length method).....	171
6.5.2	Μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων.....	174
6.6	Επαυξητική/επαναληπτική διαδικασία.....	175
6.7	Αλγόριθμος επίλυσης με τη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου	176
6.8	Αλγόριθμος επίλυσης με τη μέθοδο ελέγχου των μετατοπίσεων.....	178

Κεφάλαιο 7

Παραδείγματα Εφαρμογών Ανάλυσης Φορέων με το Tric και άλλα στοιχεία182

7.1	Εισαγωγή	182
7.2	Εφαρμογές σε Κελύφη.....	183
7.2.1	Κέλυσος Μικρής Καμπυλότητας-Εφαρμογή Scordelis.....	183
7.2.2	Κυλινδρικό Κέλυσος υπό συγκεντρωμένο φορτίο.....	188
7.2.3	Τμήμα Κοντού Κυλίνδρου.....	192
7.2.4	Τμήμα Ημισφαιρικού Κελύφους.....	197
7.3	Εφαρμογές σε Μεταλλικές Πλαισιακές Κατασκευές.....	201
7.3.1	Μεταλλικό Πλαίσιο Π.....	203
7.3.2	Διώροφη Μεταλλική Κατασκευή.....	205
7.4	Ψευδοστατική Μέθοδος.....	214

Παράρτημα Α

Φυσική γεωμετρία στο επίπεδο.....224

A.1	Το βασικό τρίγωνο	224
A.2	Ορισμός φυσικών (τριγωνικών) συντεταγμένων.....	227
A.3	Μετασχηματισμοί συντεταγμένων	229

A.4	Παράγωγοι κατά διεύθυνση.....	230
A.5	Συνολική ανηγμένη παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα.....	235
A.5.1	Συμμετρική καμπτική μορφή	235
A.5.2	Αντισυμμετρική καμπτική μορφή	238

Παράρτημα Β

	Αρχεία Εισαγωγής Δεδομένων.....	240
B.1	Εισαγωγή	240
B.2	Παραδείγματα αρχείων εισαγωγής δεδομένων του MSC NASTRAN και τα αντίστοιχα του Tric.....	242
B.3	Αρχείο Εισαγωγής Δεδομένων Tric.....	243
B.4	Αρχείο Εισαγωγής Δεδομένων Nastran.....	247
	Βιβλιογραφία	253

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται στο πεπερασμένο στοιχείο TRIC. Πρόκειται για ένα επίπεδο πολυστρωματικό τριγωνικό στοιχείο κελύφους. Το στοιχείο αυτό προτάθηκε από τον καθηγητή κ. **Ιωάννη Αργύρη** (1995) και η θεωρία τους βασίζεται στην μέθοδο των φυσικών μορφών που επίσης αναπτύχθηκε από τον κ. Ιωάννη Αργύρη το 1964. Δυστυχώς κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής (2 Απριλίου 2004) “ο ευπατρίδης επιστήμων” όπως χαρακτηριστικά ανέφερε ο καθηγητής του Ε.Μ.Π κ. Μανόλης Παπαδρακάκης σε άρθρο του στον τύπο κατέληξε. Άφησε ωστόσο ένα τεράστιο ερευνητικό, διδακτικό και συγγραφικό έργο το οποίο αποτελεί βάση συνέχισης και σημείο αναφοράς σε νέες έρευνες και εργασίες πάνω στα αντικείμενα με τα οποία εκείνος καταπιάστηκε πρώτος βάζοντας έτσι τους θεμέλιους λίθους της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Το TRIC μπορεί να προσομοιώσει όχι μόνο κελύφη αλλά και άλλους φορείς-κατασκευές από πολυστρωματικά και ανομοιογενή υλικά υποβαλλόμενα σε μεγάλους εύρους μετατοπίσεις, εκτελώντας γραμμικές και μη γραμμικές αναλύσεις υλικού και γεωμετρίας.

Η μέθοδος των Φυσικών Μορφών (Natural modes method), η οποία εφαρμόζεται για την ανάλυση του στοιχείου TRIC, έχει ως κύριο χαρακτηριστικό της την μείωση της τάξεως του προβλήματος διαχωρίζοντας τις μετατοπίσεις ενός στοιχείου σε μετατοπίσεις στέρεου σώματος (rigid body modes), οι οποίες δεν συμβάλλουν στην ένταση του φορέα, και σε φυσικές μορφές ή μορφές παραμόρφωσης (natural modes or straining modes).

Άλλο σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι όλα τα ολοκληρώματα που απαιτούνται για τον καθορισμό του μητρώου ακαμψίας υπολογίζονται αναλυτικά. Με αυτό τον τρόπο γίνεται εξοικονόμηση χρόνου αλλά και υπολογιστικής ισχύος.

Η μέθοδος των φυσικών μορφών απαλλάσσει το στοιχείο από το φαινόμενο της παρασιτικής δυσκαμψίας (shear locking phenomenon). Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι το στοιχείο TRIC ικανοποιεί τον έλεγχο συρραφής και αυτόματα κατατάσσεται στα στοιχεία εκείνα που συγκλίνουν στη σωστή λύση με τη πυκνωση του δικτύου.

Στο **Πρώτο Κεφάλαιο** γίνεται μία εισαγωγή στην γενικότερη μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης της παρούσας διπλωματικής εργασίας να διαπιστώσει ότι η ανάλυση δομικών στοιχείων και φορέων με το Tric δεν αποκλίνει από τις γενικές αρχές και τις θεμελιώδεις διατυπώσεις της μεθοδολογίας επίλυσης με τα πεπερασμένα στοιχεία.

Στο **Δεύτερο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται μια πιο συνοπτική περιγραφή της μεθόδου των φυσικών μορφών για το στοιχείο κελύφους TRIC τα πλεονεκτήματα της οποίας αναγράφονται παραπάνω.

Στο **Τρίτο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται η θεωρία αναλυτικού υπολογισμού παχιών και λεπτών κελυφών καθώς και τα είδη των κελυφών σε σχέση με τη γεωμετρία τους και την εντατική τους κατάσταση.

Στο **Τέταρτο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται η γραμμική ελαστική ανάλυση φορέων με το TRIC. Πιο συγκεκριμένα περιγράφεται η μεθοδολογία υπολογισμού του καταστατικού μητρώου αλλά κυρίως του μητρώου ακαμψίας στο φυσικό, στο τοπικό και μετά στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Επίσης δίνονται οι τύποι υπολογισμού των τάσεων και των εντατικών μεγεθών.

Στο **Πέμπτο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση φορέων με τα πεπερασμένα στοιχεία. Αναγράφονται τα είδη μη γραμμικότητας, η επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson με την οποία γίνεται η επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων καθώς και τα κριτήρια διαρροής με έμφαση στο κριτήριο διαρροής κατά Von Mises με το οποίο θα γίνει και η μη γραμμική ανάλυση με το TRIC.

Στο **Έκτο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση φορέων με το πεπερασμένο στοιχείο TRIC. Γίνεται ο υπολογισμός του ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου αλλά και του εφαπτομενικού μητρώου δυσκαμψίας K_T . Παρουσιάζονται μεθοδολογίες ανεύρεσης καμπύλης φορτίου - μετατόπισης όπως η μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc-length method) και η μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων (displacement control method) καθώς και οι αλγόριθμοι επίλυσης με αυτές τις μεθόδους.

Στο **Έβδομο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται εφαρμογές του στοιχείου TRIC σε κελύφη και άλλους φορείς. Αναλυτικότερα γίνεται μη γραμμική ανάλυση κάποιων τύπων κελυφών με τη βοήθεια του προγράμματος Nastran καθώς και με τον κώδικα που έχει γραφτεί σε Fortran του στοιχείου TRIC. Γίνεται η σύγκριση και η εξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων. Τέλος με τα πλεονεκτήματα του TRIC δόθηκε η δυνατότητα, στα πλαίσια της διπλωματικής μου εργασίας, να προσομοιωθεί μια διώροφη μεταλλική κατασκευή (με διατομές δοκών και υποστυλωμάτων εμπορίου IPE και HEB) με το τριγωνικό αυτό στοιχείο κελύφους. Κατά την επίλυση εντοπίστηκαν τοπικές αστοχίες και λυγισμοί, φαινόμενα τα οποία ουδέποτε ως τώρα θα εντοπίζονταν με την προσομοίωση αυτής της κατασκευής με τα κοινά στοιχεία δοκού κάτι το οποίο παρουσιάζεται ανάγλυφα μέσα από τα συγκριτικά αποτελέσματα που δίνονται.

Στο **Παράρτημα Α** παρουσιάζονται βασικά στοιχεία αναλυτικής γεωμετρίας στο φυσικό σύστημα.

Τέλος, στο **Παράρτημα Β** παρουσιάζονται τα προγράμματα σε Fortran που μετέτρεπαν τα αρχεία εισαγωγής στο κώδικα του TRIC σε αρχεία ABAQUS τα οποία έγιναν συμβατά και από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN.

Η εργασία αυτή αποτέλεσε μία προσπάθεια εμβάθυνσης στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων και ειδικότερα στο στοιχείο TRIC. Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε επέκταση της ανάλυσης με το TRIC στη μη γραμμική

συμπεριφορά τόσο της γεωμετρίας όσο και του υλικού των κατασκευών. Εκπονήθηκε κατά τον τελευταίο χρόνο του πενταετούς κύκλου σπουδών μου, στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, και εκτιμώ ότι με βοήθησε πάρα πολύ να κατανοήσω τόσο κάποια από τα θεωρητικά όσο και από τα πρακτικά ζητήματα που άπτονται της επιστήμης αυτής. Κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, μου ανοίγονταν συνεχώς νέοι δρόμοι γνώσης. Αυτό αποτέλεσε για μένα πρόκληση έρευνας και μελέτης προσπαθώντας και επεκτείνοντας τις γνώσεις μου πέρα από εκείνες του προπτυχιακού μου επιπέδου για να καλύψω όσο πιο εμπεριστατωμένα και σφαιρικά μπορούσα το θέμα της ανάλυσης φορέων με το πεπερασμένο στοιχείο TRIC το οποίο θεωρείται παγκοσμίως αυτή τη στιγμή κορυφαίο στοιχείο προσομοίωσης και ανάλυσης κελυφών και άλλων κατασκευών. Από τη θέση αυτή αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω ιδιαίτερα:

Τον επιβλέποντα αυτής της εργασίας και διδάσκοντα του Δομοστατικού Τομέα του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, **κ. Λαγαρό Νικόλαο** για την πολύτιμη καθοδήγηση και υποστήριξη του κατά την εκτέλεση της διπλωματικής εργασίας. Για την άριστη συνεργασία μας και το πάντα πολύ ωραίο κλίμα συνεννόησης και προθυμίας από μέρους του για την επίλυση οποιασδήποτε απορίας μου. Για τις γνώσεις που μου μετέδωσε σχετικά με το αντικείμενο της διπλωματικής μου εργασίας και το μεγάλο σε όγκο υλικό σημειώσεων και βιβλίων που με προμήθευε. Με ωθούσε πάντα και σε νέους δρόμους γνώσης και έρευνας που προέκυπταν κάθε τόσο μέσα από αυτή την εργασία και θα ήθελα να συνεχίσω να τους ανακαλύπτω και σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Συνέβαλλε στα μέγιστα με την ενθάρρυνση του ιδιαίτερα σε κάποια σημεία στα οποία οι απαιτήσεις της εργασίας με έκαναν να αποθαρρύνομαι, ενώ πάντα ήταν καταδεικτικός και συζητήσιμος σε οποιαδήποτε νέα σκέψη μου ανά πάσα στιγμή για την υλοποίηση τελικά ενός άρτιου αποτελέσματος.

Τον καθηγητή του Δομοστατικού Τομέα του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, **κ. Μανόλη Παπαδρακάκη** για την μεταλαμπάδευση γνώσεων του πάνω στο αντικείμενο της διπλωματικής μου εργασίας

και ιδιαίτερα στο απαιτητικό γνωστικό τομέα της μη γραμμική ανάλυσης με τα πεπερασμένα στοιχεία. Για τις συμβουλές του και τη πάντα σωστή καθοδήγησή του στη δομή της εργασίας μου. Τέλος θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για το πολύτιμο και πολυπληθές υλικό δημοσιεύσεων του και βιβλίων του που με προμήθευσε σχετικά με το πεπερασμένο στοιχείο TRIC. Τον υποψήφιο διδάκτορα του τομέα Δομοστατικής του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου **Ανδρέα Γκισάκη** για τις καθοριστικές υποδείξεις του πάνω σε λεπτά σημεία της θεωρίας του στοιχείου TRIC. Για την πολύτιμη βοήθειά του στον κώδικα του TRIC και στην εκμάθηση του προγράμματος NASTRAN. Τον υποψήφιο διδάκτορα του τομέα Δομοστατικής του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου **Ζαχαρία Μουρούτη** για την βοήθειά του σχετικά με το αντικείμενο της ψευδοστατικής μεθόδου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους τους καθηγητές που είχα στις προπτυχιακές μου σπουδές. Με τις γνώσεις τους και την άφλογη με τους περισσότερους συνεργασία όλα αυτά τα 5 χρόνια με έκαναν να νιώθω ότι μπορώ να αντεπεξέλθω σε κάθε δυσκολία που θα μου παρουσιαστεί από εδώ και στο εξής ως Πολιτικός Μηχανικός πλέον.

Τέλος τις περισσότερες ευχαριστίες μου θα ήθελα να τις δώσω στους γονείς μου που κατά τη διάρκεια των 5 χρόνων των σπουδών μου, μου συμπαράσταθηκαν όχι μόνο υλικά αλλά και ψυχολογικά. Με στήριξαν σε κάθε μου προσπάθεια και με βοήθησαν να ξεπεράσω δυσκολίες δίνοντάς μου πάντα θάρρος και ψυχική δύναμη.

Βόλος –Σεπτέμβριος 2004

Κωνσταντίνος Ι. Νικολάου

1

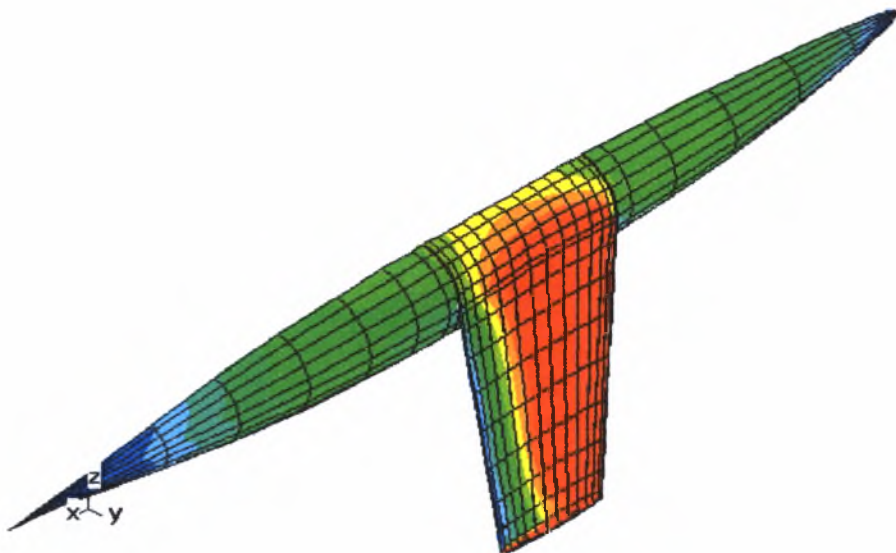
Εισαγωγή στην Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

1.1 Ιστορική Αναδρομή της Μεθόδου

Για την καλύτερη κατανόηση της ανάλυσης φορέων με το τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο Tric θα αναλυθεί στο κεφάλαιο αυτό, μετά τη σύντομη εισαγωγή του ιστορικού της «γέννησης» των πεπερασμένων στοιχείων, η γενικότερη μεθοδολογία ανάλυσης φορέων με πεπερασμένα στοιχεία και θα διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας με την αρχή δυνατών έργων. Έτσι θα δοθεί η δυνατότητα στον αναγνώστη της παρούσας διπλωματικής εργασίας να διαπιστώσει ότι η ανάλυση δομικών στοιχείων και φορέων με το Tric δεν αποκλίνει από τις γενικές αρχές και τις θεμελιώδεις διατυπώσεις της μεθοδολογίας επίλυσης με τα πεπερασμένα στοιχεία. Υπάρχουν βέβαια και κάποια σημεία στα οποία διατυπώθηκαν καινούριες μεθοδολογίες. Σκοπός αυτών των καινοτομιών πάντα (οι οποίες εκτεταμένα αναφέρονται στα ακόλουθα κεφάλαια) αποτελεί η μείωση του υπολογιστικού χρόνου και η αύξηση της ακρίβειας προσομοίωσης των δομικών στοιχείων και φορέων που εξετάζονται, δυο φαινόμενα τα οποία είναι αντιφατικά κατά την χρήση συμβατικών πεπερασμένων στοιχείων.

Επιχειρώντας μια σύντομη ιστορική αναδρομή στις πρώτες εφαρμογές της μεθόδου, η διατύπωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έγινε κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου (1944) από τον Ιωάννη Αργύρη, ο οποίος εργαζόταν ως ερευνητής στο Royal Aeronautical Society της Βρετανίας και ο οποίος καταπιάστηκε με το πρόβλημα των δομοστατικών αεροναυπηγών μηχανικών της εποχής. Το πρόβλημα αυτό ήταν σχετικό με την κατασκευή των πρώτων αεριωθούμενων μαχητικών αεροσκαφών τα οποία θα κινούνταν με υψηλές ταχύτητες και απαιτούσαν κεκλιμένες προς τα πίσω πτέρυγες (Σχήμα 1.0). Μετά από μεγάλη προσπάθεια επινόησε τη χρήση των τριγωνικών στοιχείων και πραγματοποίησε τις πρώτες του εφαρμογές σε υπολογι-

στές της εποχής με μέγιστη δυνατότητα χειρισμού αλγεβρικών συστημάτων μέχρι 64 αγνώστους.



Σχήμα 1.0 Πρόβλημα κεκλιμένων περυγών αεροσκαφών με το οποίο καταπιάστηκε ο Ιωάννης Αργύρης (1944)

Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών με τις ολοένα και μεγαλύτερες δυνατότητες διαχείρισης μεγάλου όγκου δεδομένων αλλά και με την αύξηση της ταχύτητας εκτελέσεως των αριθμητικών πράξεων κατέστησε εφικτή την επίλυση, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, σύνθετων προβλημάτων του μηχανικού τα οποία θεωρούνταν απροσπέλαστα πριν από μερικά χρόνια.

Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αντικατάσταση του γεωμετρικά σύνθετου πεδίου του προβλήματος με ένα σύνολο απλών υποπεδίων τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Η κατασκευή μας δηλαδή υποδιαιρείται με την βοήθεια ιδεατών γραμμών ή επιφανειών σε ένα αριθμό στοιχείων. Η υποδιαίρεση αυτή καλείται διακριτοποίηση του φορέα μας. Η ακρίβεια της διακριτοποίησης καθορίζει και την ακρίβεια των εξαγόμενων αποτελεσμάτων με τη μέθοδο αυτή.

Σε κάθε ένα από τα στοιχεία αυτά αλλά και γενικότερα στο φορέα επιλύονται οι εξισώσεις ισορροπίας, οι καταστατικές αλλά και οι κινηματικές εξισώσεις αριθμητικά. Οι εξισώσεις αυτές, της Μηχανικής Παραμορφώσιμου Σώματος, αρκούν για να περιγράψουν πλήρως την κινηματική και την εντατική κατάσταση ενός φορέα στον οποίο ασκείται οποιουδήποτε είδους φόρτιση ή εξαναγκασμένη μετακίνηση. Επισημαίνεται ότι η αναλυτική επίλυση των παραπάνω εξισώσεων είναι σχεδόν αδύνατη σε σύνθετους φορείς, γι' αυτό και η αριθμητική επίλυσή τους από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αποτελεί μονόδρομο. Ωστόσο η μη αναλυτική επίλυση των παραπάνω εξισώσεων εισάγει ποσοστό σφάλματος στα αποτελέσματα αφού οι αριθμητικές λύσεις είναι πάντα προσεγγίσεις του πραγματικού προβλήματος.

Τα στοιχεία θεωρούνται ότι συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία, τους κόμβους. Αυτό σημαίνει ότι η κατασκευή μετασχηματίζεται σε ένα είδος δικτυώματος. Σε κάθε κόμβο κάθε στοιχείου αντιστοιχεί ένας αριθμός κομβικών παραμέτρων. Κάποιες από τις κομβικές παράμετροι είναι η δυνατότητα μετατόπισής τους οι οποίες καλούνται βαθμοί ελευθερίας.

Οι βαθμοί ελευθερίας του κάθε στοιχείου αφορούν μετακινήσεις των κορυφών (κόμβων) του ενώ οι βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι το σύνολο των βαθμών ελευθερίας των κόμβων. Ανά δύο τα πεπερασμένα στοιχεία έχουν μια κοινή πλευρά. Στις κοινές αυτές πλευρές πρέπει να ισχύουν συνθήκες συνέχειας δηλαδή να ικανοποιείται ο έλεγχος συρραφής.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων προσεγγίζουν τόσο καλύτερα μια φυσική κατάσταση όσο λεπτότερη γίνεται η διαβάθμιση των στοιχείων δηλαδή όσο πυκνότερο είναι το δίκτυο των στοιχείων. Αντίστοιχο πρόβλημα στα μαθηματικά είναι ο υπολογισμός της περιφέρειας του κύκλου. Όσο πιο μικρές γίνονται οι πλευρές του περιγεγραμμένου ή εγγεγραμμένου στον κύκλο πολυγώνου, τόσο καλύτερα προσεγγίζεται η περιφέρειά του. Οι πλευρές του πολυγώνου αντιστοιχούν στα πεπερασμένα στοιχεία.

Στους γραμμικούς φορείς το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου υπολογίζεται επακριβώς γιατί η σχέση φορτίου – μετακίνησης κατά τη διεύθυνση ενός βαθμού ελευθερίας μπορεί να βρεθεί με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών συμπληρωματικών έργων (μέθοδος μοναδιαίου φορτίου).

Στους επιφανειακούς φορείς καθίσταται αναγκαίο να εισαχθούν οι συναρτήσεις μετακινήσεων των σημείων του στοιχείου, συναρτήσει των οποίων εκφράζονται οι παραμορφώσεις, οι τάσεις και τα φορτία διατομής του στοιχείου. Με τα δεδομένα αυτά καθίσταται πλέον δυνατή η εφαρμογή ενεργειακών μεθόδων για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου. Με την εφαρμογή επίσης ενεργειακών μεθόδων βρίσκεται και το μητρώο φορτίου του στοιχείου.

Συνοψίζοντας τα πλεονεκτήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων προκύπτουν τα εξής:

- Εφαρμόζεται επιτυχώς σε φορείς με όχι απλή γεωμετρία και με οποιοδήποτε είδος συνόρου.
- Η ανισοτροπία και η ανομοιογένεια του υλικού μπορούν εύκολα να αντιμετωπισθούν.
- Κάθε είδος φόρτισης μπορεί επίσης να αντιμετωπισθεί.

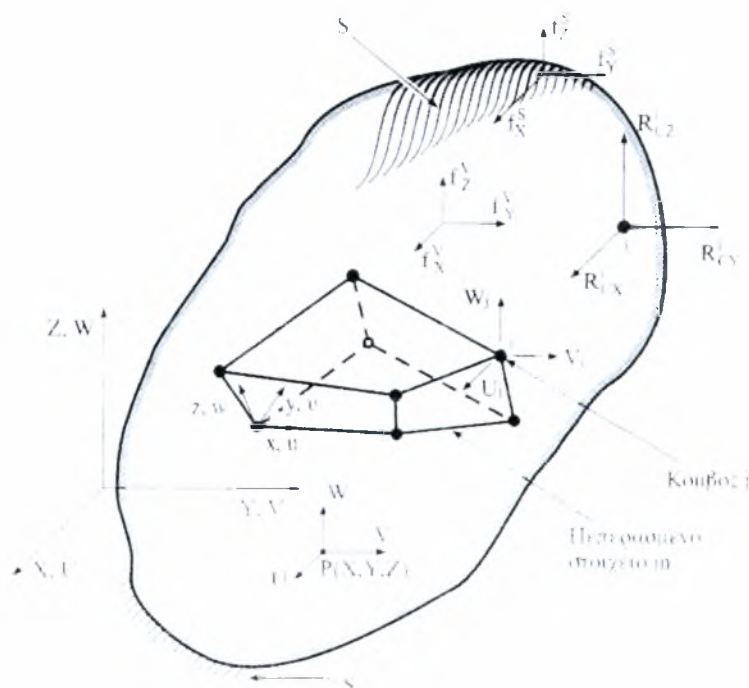
1.2 Γεωμετρία και φόρτιση του φορέα

Η γενική εξίσωση ισορροπίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων θα διατυπωθεί αρχικά για έναν φορέα τρισδιάστατης ελαστικότητας μέσω της αρχής των δυνατών έργων. Ας θεωρήσουμε την ισορροπία του φορέα του σχήματος 1.1 ο οποίος ορίζεται ως προς το καθολικό σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων XYZ. Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων θεωρούμε ότι ο φορέας αποτελείται από ένα σύνολο διακριτών πεπερασμένων στοιχείων τα οποία εφάπτονται μεταξύ τους χωρίς να αφήνουν κανένα κενό και συνδέονται με τους κόμβους που βρίσκονται στα σύνορα των στοιχείων. Το σύνολο αυτό των στοιχείων ονομάζεται δίκτυο ή πλέγμα και η προσο-

μοίωση του φορέα με το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται διακριτοποίηση του φορέα.

Ο φορέας του σχήματος 1.1 στηρίζεται στην επιφάνεια S_u με καθορισμένες μετατοπίσεις $\{D^{Su}\}$, και υποβάλλεται στις επιφανειακές δράσεις $\{f^S\}$ (δράσεις ανά μονάδα επιφανείας) στην περιοχή επιφάνειας S . Επιπλέον ο φορέας υποβάλλεται σε μαζικές δράσεις $\{f^V\}$ (δράσεις ανά μονάδα όγκου) και στις επικόμβιες δράσεις $\{R^i_c\}$ στον κόμβο i . Στο σχήμα 1.1 φαίνεται επίσης το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του πεπερασμένου στοιχείου m . Τα διανύσματα των εξωτερικών δράσεων ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\{R^i_c\} = \begin{pmatrix} R^i_{cx} \\ R^i_{cy} \\ R^i_{cz} \end{pmatrix}, \quad \{f^V\} = \begin{pmatrix} f^V_x \\ f^V_y \\ f^V_z \end{pmatrix}, \quad \{f^S\} = \begin{pmatrix} f^S_x \\ f^S_y \\ f^S_z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$



Σχήμα 1.1 Ολόσωμος τρισδιάστατος φορέας διακριτοποιημένος με εξαεδρικά πεπερασμένα στοιχεία οκτώ κόμβων

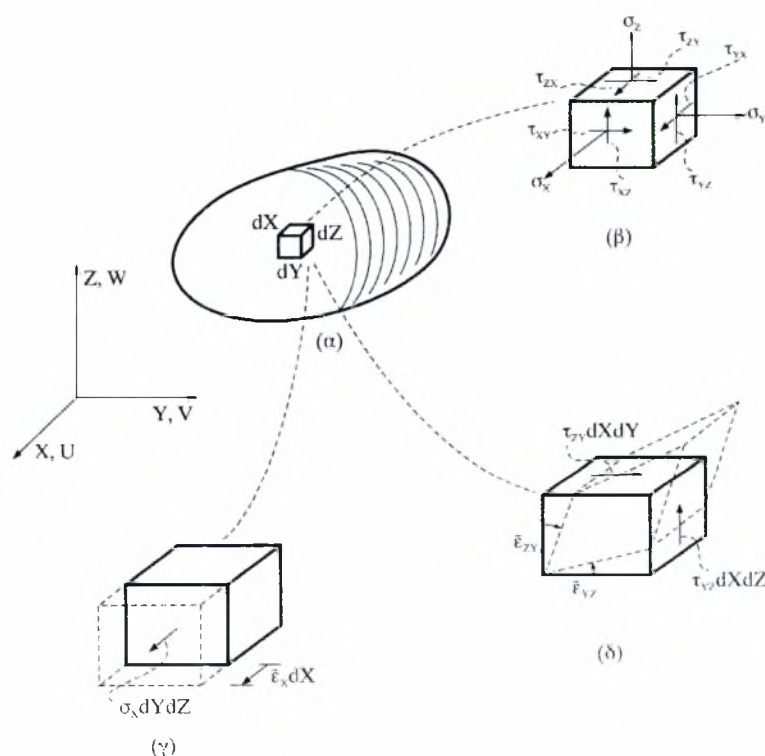
Οι μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου $P(X,Y,Z)$ του φορέα, ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων XYZ εκφράζονται από το διάνυσμα

$$\{U(X,Y,Z)\} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ενώ οι επικόμβιες μετατοπίσεις όλων των κόμβων του φορέα εκφράζονται από το διάνυσμα $\{D\} = [U_1 V_1 W_1 \ U_2 V_2 W_2 \ \dots]^T$

1.3 Τάσεις και Παραμορφώσεις

Οι τάσεις οι οποίες ασκούνται σε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $dX-dY-dZ$ στην τρισδιάστατη ελαστικότητα φαίνονται στο σχήμα 1.2α.



Σχήμα 1.2 (α) Ολόσωμος τρισδιάστατος φορέας, (β) στερεό τάσεων, (γ) ορθή δυνατή παραμόρφωση, (δ) διατμητική δυνατή παραμόρφωση

Λόγω του ότι ισχύουν οι σχέσεις $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ και $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, η εντατική κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο του φορέα προσδιορίζονται από τις έξι συνιστώσες της τάσης σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} οι οποίες και καθορίζουν το διάνυσμα των τάσεων $\{\sigma\}$:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1.3)$$

Κατ' αναλογία προς τις τάσεις, η κατάσταση της παραμόρφωσης ενός σημείου του φορέα προσδιορίζεται από τις αντίστοιχες έξι συνιστώσες της παραμόρφωσης οι οποίες και ορίζουν το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων $\{\epsilon\}$:

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (1.4)$$

όπου γ_{ij} είναι οι τεχνικές ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις (engineering shear strain):

$$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy} \quad \gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz} \quad \gamma_{zx} = 2 \epsilon_{zx} \quad (1.5)$$

1.4 Αρχή Δυνατών Έργων

Προκειμένου να διατυπωθεί η εξίσωση ισορροπίας του φορέα που φορτίζεται με τα εξωτερικά φορτία $\{f^S\}$, $\{f^V\}$, $\{R^i_c\}$ όπου $i=1,2,\dots$ θα εφαρμοστεί η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων η οποία ονομάζεται και αρχή δυνατών έργων. Θα θεωρήσουμε ότι το υλικό είναι γραμμικώς ελαστικό και ότι επικρατούν συνθήκες μικρών μετατοπίσεων οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να διατυπωθούν στη γεωμετρία του απαραμόρφωτου φορέα.

Η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων διατυπώνεται ως εξής: *Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία και ισορροπεί, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίζεώς του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων.*

Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2β το δυνατό έργο της ορθής δύναμης $s_x dYdZ$ για μια δυνατή μετατόπιση της έδρας $dY-dZ$ κατά $\overline{\epsilon_x} dX$ ισούται με

$$\overline{\varepsilon}_x dX \sigma_x dY dZ = \overline{\varepsilon}_x \sigma_x dV \quad (1.6)$$

ενώ το δυνατό έργο των διατμητικών δυνάμεων $\tau_{YZ} dX dZ$ και $\tau_{ZX} dY dX$ δίνεται από το άθροισμα των γινομένων

$$\begin{aligned} & \overline{\varepsilon}_{YZ} dY \tau_{YZ} dX dZ + \overline{\varepsilon}_{ZX} dZ \tau_{ZX} dY dX \\ \dot{\eta} \quad & 2 \overline{\varepsilon}_{YZ} \tau_{YZ} dV = \overline{\gamma}_{YZ} \tau_{YZ} dV \end{aligned} \quad (1.7)$$

Επομένως το συνολικό δυνατό έργο των δυνάμεων που δρουν στο στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο ισούται με

$$\begin{aligned} dW_{int} &= (\overline{\varepsilon}_x \sigma_x + \overline{\varepsilon}_y \sigma_y + \overline{\varepsilon}_z \sigma_z + \overline{\gamma}_{xy} \tau_{xy} + \overline{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \overline{\gamma}_{zx} \tau_{zx}) dV \\ \dot{\eta} \quad & dW_{int} = \{\overline{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV \end{aligned} \quad (1.8)$$

Για όλον το φορέα το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με

$$W_{int} = \int \{\overline{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} dV \quad (1.9)$$

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων θα αποτελείται από το έργο των επιφανειακών δυνάμεων, το έργο των μαζικών δυνάμεων και το έργο των επικόμβιων δυνάμεων:

$$W_{ext} = \int_V \{\overline{U}\}^T \{f^V\} dV + \int_S \{\overline{U}^S\}^T \{f^S\} dS + \{\overline{D}\}^T \{R_C\} \quad (1.10)$$

όπου $\{\overline{U}\}$ είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός τυχαίου σημείου $P(X,Y,Z)$ του φορέα, $\{\overline{U}^S\}$ είναι το διάνυσμα των δυνατών μετατοπίσεων ενός τυχαίου σημείου της φορτιζόμενης επιφάνειας S , και $\{\overline{D}\}$, $\{R_C\}$ είναι τα διανύσματα των δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων και επικόμβιων δράσεων του φορέα, αντίστοιχα. Η εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων γράφεται:

$$W_{int} = W_{ext}$$

$$\dot{\eta} \quad \int_V \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\bar{U}\}^T \{f^V\} dV + \int_S \{\bar{U}^S\}^T \{f^S\} dS + \{\bar{D}\}^T \{R_c\} \quad (1.11)$$

Στην εξίσωση (1.11) έχουμε θεωρήσει ότι οι τάσεις $\{\sigma\}$ αντιστοιχούν στις τάσεις που ισορροπούν τα εξωτερικά φορτία. Οι δυνατές μετατοπίσεις $\{\bar{U}\}$ αντιπροσωπεύουν ένα συνεχές πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, συμβιβαστό με τις συνθήκες στηρίξεως του φορέα ($\{\bar{U}\}=0$ στις στηρίξεις S_u), από το οποίο προσδιορίζονται οι δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις $\{\bar{\epsilon}\}$.

1.5 Σχέσεις ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (Κινηματικές Σχέσεις)

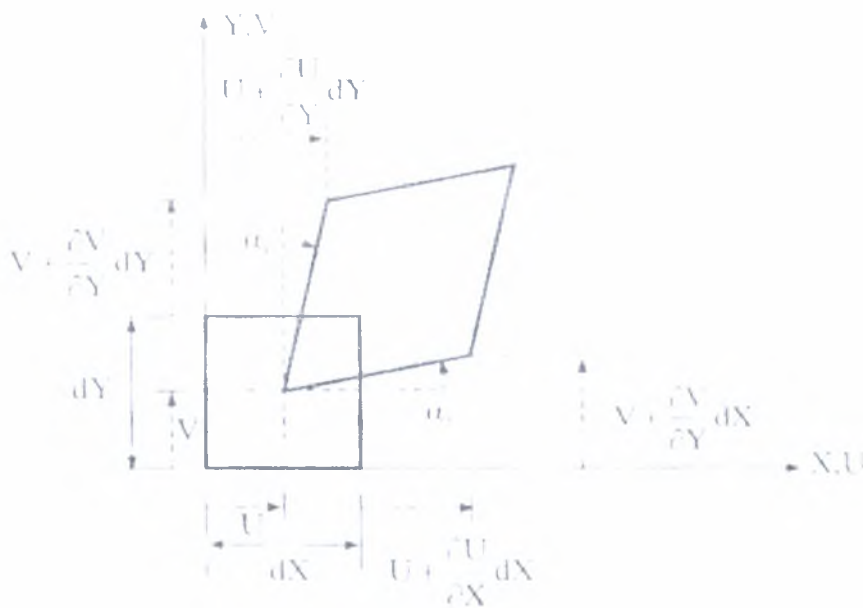
Η διατύπωση των σχέσεων ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για τον προσδιορισμό του μητρώου ακαμψίας των πεπερασμένων στοιχείων. Συνήθως διατυπώνονται στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αλλά μπορούν επίσης να διατυπωθούν και σε άλλα συστήματα ή με άλλους τρόπους πέρα του κλασσικού (όπως με τη μέθοδο των φυσικών μορφών και στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων για το εξεταζόμενο στοιχείο Τric στο οποίο θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε επόμενα κεφάλαια).

Στο σχήμα 1.3 έχει σχεδιαστεί ένα στοιχειώδες ορθογώνιο ενός επιπέδου σώματος πριν και μετά την παραμόρφωση. Οι μετατοπίσεις U και V είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων X, Y : $U=U(X, Y)$, $V=V(X, Y)$. Έτσι με την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων, η ανηγμένη παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση X δίνεται από τη σχέση:

$$\epsilon_x = \frac{[dX + (U + \frac{\partial U}{\partial X}) - U] - dX}{dX} = \frac{\partial U}{\partial X} \quad (1.12\alpha)$$

και αντίστοιχα ορίζεται η ανηγμένη παραμόρφωση κατά την διεύθυνση Y:

$$\varepsilon_Y = \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (1.12\beta)$$



Σχήμα 1.3 Παραμόρφωση στοιχειώδους ορθογωνίου dX-dY

Η διατμητική ανηγμένη παραμόρφωση στην τεχνική της διατύπωση ορίζεται ως η αλλαγή της ορθής γωνίας του στοιχειώδους παραλληλόγραμμου dX-dY. Με την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων ($\alpha_1 \approx \tan \alpha_1$, $\alpha_2 \approx \tan \alpha_2$) θα έχουμε

$$\gamma_{XY} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{(U + \frac{\partial U}{\partial Y}dY) - U}{dY} + \frac{(V + \frac{\partial V}{\partial X}dX) - V}{dX} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \quad (1.13)$$

κατά συνέπεια το σύνολο των σχέσεων ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων σε τρεις διαστάσεις γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \partial U / \partial X & \gamma_{xy} &= \partial U / \partial Y + \partial V / \partial X \\
\varepsilon_y &= \partial V / \partial Y & \gamma_{yz} &= \partial V / \partial Z + \partial W / \partial Y \\
\varepsilon_z &= \partial W / \partial Z & \gamma_{zx} &= \partial W / \partial X + \partial U / \partial Z
\end{aligned} \tag{1.14\alpha}$$

οι οποίες συντομογραφικά διατυπώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= U_{,x} & \gamma_{xy} &= U_{,y} + V_{,x} \\
\varepsilon_y &= V_{,y} & \gamma_{yz} &= V_{,z} + W_{,y} \\
\varepsilon_z &= W_{,z} & \gamma_{zx} &= W_{,x} + U_{,z}
\end{aligned} \tag{1.14\beta}$$

Σε μητρική μορφή οι σχέσεις (1.14) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial Z \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Z & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Z & 0 & \partial/\partial X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$$

$$\dot{\eta} \quad \quad \quad \{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon] \{U\} \tag{1.15}$$

όπου το διάνυσμα $\{U\} = [UVW]^T$ συμβολίζει το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάποιο σημείο του φορέα και το μητρώο $[\partial_\varepsilon]$ τον διαφορικό τελεστή της σχέσης (1.15).

1.6 Σχέσεις τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων (Καταστατικός νόμος του υλικού)

Οι μητρωικές σχέσεις τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων γραμμικώς ελαστικών υλικών σε ισοθερμική παραμόρφωση γράφονται ως εξής:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (1.16\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (1.16\beta)$$

όπου $[C]$ είναι ένα συμμετρικό μητρώο το οποίο εκφράζει την παραμόρφωση του υλικού στις ασκούμενες τάσεις και $[E]$ είναι επίσης ένα συμμετρικό μητρώο που εκφράζει τη στιβαρότητα του υλικού στις επιβαλλόμενες παραμορφώσεις με $[E] = [C]^{-1}$. Στη γενική περίπτωση της ανισοτροπίας, τα μητρώα $[C]$ και $[E]$ περιλαμβάνουν 21 ανεξάρτητους όρους. Οι σχέσεις (1.16) εκφράζουν το νόμο του Hooke κατά τον οποίο οι τάσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων και ισχύουν με την παραδοχή των μικρών παραμορφώσεων και για συγκεκριμένα υλικά.

Στην περίπτωση ισότροπων υλικών, οι ιδιότητες των υλικών εκφράζονται με τον συνδυασμό του μέτρου ελαστικότητας E και του συντελεστή Poisson ν . Στην περίπτωση αυτή το μητρώο $[E]$ στην τρισδιάστατη ελαστικότητα έχει την μορφή

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

και το μητρώο $[C]$ δίνεται από την σχέση:

$$[C]_{6 \times 6} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Στις σχέσεις (1.17) και (1.18) θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί, όπως θα δούμε και σε επόμενο κεφάλαιο, το μέτρο διατμήσεως $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ το οποίο συνδέει τις διατμητικές τάσεις με τις ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx} \quad (1.19)$$

Είναι δυνατόν, πριν την παραμόρφωση ενός φορέα λόγω εξωτερικής φόρτισης, να προϋπάρχουν αρχικές τάσεις $\{\sigma_0\}$ με μηδενικές παραμορφώσεις, καθώς και αρχικές παραμορφώσεις $\{\epsilon_0\}$ οι οποίες δεν έχουν προκαλέσει τάσεις (π.χ λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών σε ελεύθερους να παραμορφωθούν φορείς). Στην περίπτωση αυτή για να προκύψουν οι τελικές τάσεις θα πρέπει να προστεθούν στις τάσεις $\{\sigma\}$ λόγω εξωτερικής φόρτισης οι αρχικές τάσεις $\{\sigma_0\}$:

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma\} + \{\sigma_0\} \quad (1.20)$$

ενώ κατά τον υπολογισμό των τάσεων $\{\sigma\}$ θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η αρχική παραμόρφωση $\{\epsilon_0\}$:

$$\{\sigma\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad (1.21)$$

όπου $\{\epsilon\}$ είναι το διάνυσμα των συνολικών ανηγμένων παραμορφώσεων. Ο συνδυασμός των σχέσεων (1.21) και (1.20) θα μας δώσει την έκφραση του συνολικού διανύσματος των τάσεων όταν υπάρχουν αρχικές τάσεις και παραμορφώσεις στον φορέα:

$$\{\sigma_i\} = [E](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (1.22)$$

1.7 Διατύπωση Εξίσωσης Ισορροπίας

Το μητρώο ακαμψίας ενός πεπερασμένου στοιχείου διατυπώνεται μέσω της αρχής των δυνατών έργων ή της θεωρίας των μεταβολών και δεν υπολογίζεται με την άμεση εφαρμογή της μεθόδου των δυνάμεων όπως συμβαίνει στη μητρωική ανάλυση ραβδωτών φορέων με την μέθοδο της άμεσης στιβαρότητας. Υπενθυμίζεται ότι, προκειμένου να υπολογισθεί το μητρώο ακαμψίας ενός ραβδωτού στοιχείου, εφαρμόζεται η μέθοδος του μοναδιαίου φορτίου για τον προσδιορισμό του μητρώου ενδοσιμότητας και στη συνέχεια υπολογίζεται το μητρώο ακαμψίας.

1.7.1 Συναρτήσεις Σχήματος πεπερασμένου στοιχείου

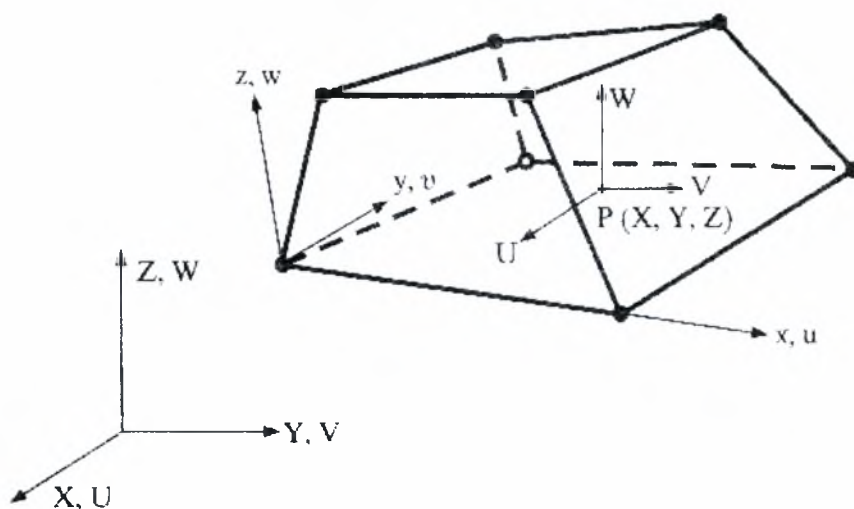
Η βασική παραδοχή η οποία επηρεάζει σημαντικά την αξιοπιστία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων εστιάζεται στον ορισμό ενός προσεγγιστικού πεδίου μετατοπίσεων στο εσωτερικό του κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Οι συνιστώσες της μετατόπισης U , V , W στο καθολικό σύστημα του φορέα σε κάθε σημείο $P(X,Y,Z)$ του πεπερασμένου στοιχείου συνθέτουν το πεδίο των μετατοπίσεων το οποίο εκφράζεται συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων $\{d\} = [U_1 V_1 W_1 U_2 V_2 W_2 \dots]^T$ του στοιχείου.

Έτσι για το στοιχείο m του σχήματος 1.1 με n_e κόμβους, το οποίο σχεδιάστηκε απομονωμένο στο σχήμα 1.4 θεωρούμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\begin{pmatrix} U(X,Y,Z) \\ V(X,Y,Z) \\ W(X,Y,Z) \end{pmatrix} = [N(X,Y,Z)] \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \vdots \\ U_{n_e} \\ V_{n_e} \\ W_{n_e} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\eta} \quad \begin{pmatrix} U(X,Y,Z) \\ 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(X,Y,Z) \\ 3 \times 3n_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 3n_e \times 1 \end{pmatrix} \quad (1.23\alpha)$$

$$\text{και} \quad \{U^S(X,Y,Z)\} = [N^S(X,Y,Z)] \{d\} \quad (1.23\beta)$$



Σχήμα 1.4 Εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων με το τοπικό και το καθολικό σύστημα αξόνων

όπου $\{U(X,Y,Z)\}$ είναι το διάνυσμα των συνιστωσών των μετατοπίσεων ενός σημείου $P(X,Y,Z)$ στο εσωτερικό του στοιχείου το οποίο εκφράζει το πεδίο των μετατοπίσεων του στοιχείου, $\{d\}$ είναι το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου και $[N(X,Y,Z)]$ είναι το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος ή συναρτήσεων παρεμβολής το οποίο εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το πεδίο των μετατοπίσεων συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου. Κατ' αντιστοιχία, $\{U^S(X,Y,Z)\}$ και $[N^S(X,Y,Z)]$ είναι το πεδίο των μετατοπίσεων και οι συναρτήσεις σχήματος ενός σημείου στην επιφάνεια S του στοιχείου που συμπίπτει με τη φορτιζόμενη επιφάνεια του φορέα. Το μητρώο $[N(X,Y,Z)]$ εξαρτάται από τον τύπο του στοιχείου και παίζει σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια με την οποία προσδιορίζεται το μητρώο ανακρίβειας του στοιχείου.

1.7.2 Μητρώα Παραμορφώσεως Στοιχείου

Η σχέση μεταξύ του διανύσματος των επικόμβιων μετατοπίσεων ενός στοιχείου και των επικόμβιων μετατοπίσεων του φορέα εκφράζεται μέσω ενός μητρώου συμβατότητας $\left[\mathbf{t}^{(m)} \right]$:

$$\left\{ \mathbf{d}^{(m)} \right\}_{n_m \times 1} = \left[\mathbf{t}^{(m)} \right]_{n_m \times n} \left\{ \mathbf{D} \right\}_{n \times 1} \quad (1.24)$$

όπου n_m , n είναι οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου m και του φορέα αντίστοιχα. Το μητρώο $\left[\mathbf{t}^{(m)} \right]$ είναι ένα μητρώο Boolean, με όρους 0 ή 1, που συνδέει τους τοπικούς με τους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας των κόμβων του στοιχείου και εκφράζει τη συνθήκη του συμβιβαστού των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου με τους κόμβους του φορέα στους οποίους αντιστοιχούν. Το μητρώο $\left[\mathbf{t}^{(m)} \right]$ εκφράζει τη διασπορά των όρων ενός τοπικού διανύσματος σε ένα καθολικό διάνυσμα, όπως υποδηλώνει η σχέση (1.24), ενώ το ανάστροφο μητρώο $\left[\mathbf{t}^{(m)} \right]^T$ εκφράζει την κατανομή των όρων ενός καθολικού διανύσματος $\left\{ \mathbf{R}^{(m)} \right\}$ στις τοπικές θέσεις $\left\{ \mathbf{r}^{(m)} \right\}$:

$$\left\{ \mathbf{R}^{(m)} \right\} = \left[\mathbf{t}^{(m)} \right]^T \left\{ \mathbf{r}^{(m)} \right\} \quad (1.25)$$

Για ένα πεπερασμένο στοιχείο m η σχέση (1.15), δυνάμει των σχέσεων (1.23) και (1.24), γράφεται:

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \right\} = \left[\partial_{\epsilon} \right] \left[\mathbf{N}^{(m)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \right] \left\{ \mathbf{d}^{(m)} \right\} = \left[\mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \right] \left\{ \mathbf{d}^{(m)} \right\} \quad (1.26\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \right\} = \left[\mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \right] \left[\mathbf{t}^{(m)} \right] \left\{ \mathbf{D} \right\} \quad (1.26\beta)$$

Το μητρώο $\left[\mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \right]$ ονομάζεται μητρώο παραμορφώσεως του στοιχείου και συνδέει το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου.

Εάν θεωρήσουμε ότι το πεδίο των δυνατών μετατοπίσεων $\{\bar{U}(X,Y,Z)\}$ εκφράζεται με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής της σχέσης (1.23) που ορίζουν το πραγματικό πεδίο των μετατοπίσεων, τότε το διάνυσμα των δυνατών ανηγμένων παραμορφώσεων δίνεται από μια σχέση ανάλογη της (1.26β):

$$\{\bar{\epsilon}^{(m)}\} = [B^{(m)}] [t^{(m)}] \{\bar{D}\} \quad (1.27)$$

1.7.3 Εξισώσεις Ισορροπίας Με Επικόμβια Φορτία

Η εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων (1.11) του φορέα, για την περίπτωση μόνο επικόμβιας φόρτισης γίνεται

$$\int_V \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dV = \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (1.28)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.28) μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα του δυνατού έργου των εσωτερικών δυνάμεων όλων των στοιχείων m με τα οποία έχει διακριτοποιηθεί ο φορέας:

$$\sum_m \int_{V_e} \{\bar{\epsilon}^{(m)}\}^T \{\sigma^{(m)}\} dV_e = \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (1.29)$$

όπου V_e ο όγκος του στοιχείου m .

Με την αντικατάσταση των σχέσεων (1.27) και (1.16β) στη σχέση (1.29) προκύπτει η σχέση

$$\{\bar{D}\}^T \left[\sum_m \int_{V_e} [t^{(m)}]^T [B^{(m)}]^T [E] [B^{(m)}] [t^{(m)}] dV_e^{(m)} \right] \{D\} = \{\bar{D}\}^T \{R_C\} \quad (1.30)$$

Το διάνυσμα των δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων $\{\bar{D}\}$ του φορέα είναι κοινό για όλα τα στοιχεία και ανεξάρτητο του στοιχείου m . Κατά συνέπεια μπορούν να καταλήξουν εκτός του ολοκληρώματος και του αθροίσματος της σχέσης (1.30). Επιπλέον οι δυνα-

τές επικόμβιες μετατοπίσεις του φορέα είναι τυχαίες μη μηδενικές ποσότητες και δύνανται να απλοποιηθούν από τη σχέση (1.30). Έτσι έχουμε:

$$\left[\sum_m \int_{V_e} [\mathbf{t}^{(m)}]^T [\mathbf{B}^{(m)}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}^{(m)}] [\mathbf{t}^{(m)}] dV_e \right] \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}_c\}$$

$$\text{ή} \quad [\mathbf{K}] \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}_c\} \quad (1.31)$$

Η σχέση (1.31) δίνει τη συνθήκη ισορροπίας του φορέα στην οποία το μητρώο $[\mathbf{K}]$ εκφράζει το ολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα το οποίο προκύπτει από τη σύνθεση των επιμέρους μητρώων ακαμψίας των στοιχείων του. Αυτή η διαδικασία άμεσης μόρφωσης του μητρώου δυσκαμψίας του φορέα από τα μητρώα δυσκαμψίας των στοιχείων του αναφέρεται ως άμεση μέθοδος στιβαρότητας (δυσκαμψίας).

Τα μητρώα $[\mathbf{t}^{(m)}]$ δεν μεταβάλλονται εντός των στοιχείων και έτσι μπορούν να καταλήξουν εκτός του ολοκληρώματος:

$$[\mathbf{K}] = \sum_m [\mathbf{t}^{(m)}]^T \left[\int_{V_e} [\mathbf{B}^{(m)}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}^{(m)}] dV_e \right] [\mathbf{t}^{(m)}] \quad (1.32)$$

Με τον πολλαπλασιασμό των μητρώων $[\mathbf{t}^{(m)}]^T \cdot [\mathbf{t}^{(m)}]$ επιτυγχάνεται η τοποθέτηση των δεικτών στιβαρότητας από τις τοπικές θέσεις του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου στις καθολικές θέσεις του μητρώου δυσκαμψίας του φορέα έτσι ώστε να αθροιστούν με τους καθολικούς δείκτες δυσκαμψίας των άλλων στοιχείων που αντιστοιχούν στις θέσεις αυτές. Κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα:

$$[\mathbf{k}^{(m)}] = \left[\int_{V_e} [\mathbf{B}^{(m)}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}^{(m)}] dV_e \right] \quad (1.33)$$

δίνει τη γενική έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας οποιουδήποτε πεπερασμένου στοιχείου του οποίου το μητρώο παραμορφώσεως είναι το $[\mathbf{B}^{(m)}]$ και το μητρώο ελαστικότητας $[\mathbf{E}]$.

Η έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας ενός πεπερασμένου στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων δίνεται επίσης από την έκφραση (1.33) όπου το μητρώο παραμορφώσεως $[B^{(m)}]$ εκφράζεται ως προς τις τοπικές συντεταγμένες x, y, z . Στη συνέχεια προκειμένου να μορφωθεί το μητρώο δυσκαμψίας του φορέα μετασχηματίζεται το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου από το τοπικό του σύστημα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων του φορέα με τη σχέση:

$$[k^{(m)}] = [\Lambda^{(m)}]^T [k'^{(m)}] [\Lambda^{(m)}] \quad (1.34)$$

όπου $[k'^{(m)}]$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας στο τοπικό σύστημα και $[\Lambda^{(m)}]$ είναι το μητρώο περιστροφής του στοιχείου.

Οι επικόμβιες δράσεις του φορέα προκύπτουν από τη σχέση (1.25) και εκφράζονται ως εξής

$$[R_c] = \sum_m [t^{(m)}]^T \{r_c^{(m)}\} \quad (1.35)$$

όπου $\{r_c^{(m)}\}$ είναι οι επικόμβιες δράσεις του στοιχείου m .

1.7.4 Ισοδύναμες δράσεις μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων

Τα δυνατά έργα των μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων γράφονται μετά την αντικατάσταση των σχέσεων (1.23 α, β) και (1.24) στη σχέση (1.11), ως εξής:

$$\{\bar{D}\}^T \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} [N^{(m)}]^T \{f^{v(m)}\} dV_e + \{\bar{D}\}^T \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{S_e} [N^{s(m)}]^T \{f^{s(m)}\} dS_e \quad (1.36)$$

Όπου S_e είναι το τμήμα της επιφάνειας του στοιχείου m στο οποίο ασκούνται οι επιφανειακές δυνάμεις $\{f^{s(m)}\}$ και $[N^{s(m)}]$ είναι οι συναρτήσεις παρεμβολής που συνδέουν τις μετατοπίσεις $\{U^s(X, Y, Z)\}$ στην επιφάνεια S του στοιχείου m με τις επικόμβιες μετατοπίσεις του στοιχείου.

Μετά την απαλοιφή των δυνατών μετατοπίσεων $\{\overline{D}\}^T$ των κόμβων του φορέα από τη σχέση (1.36), στο πλαίσιο της εξίσωσης (1.30), προκύπτουν οι ισοδύναμες δράσεις στους κόμβους του φορέα λόγω μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων:

$$\sum_m \left[t^{(m)} \right]^T \left[\int_{V_e} \left[N^{(m)} \right]^T \{ f^{V(m)} \} dV_e + \int_{S_e} \left[N^{S(m)} \right]^T \{ f^{S(m)} \} dS_e \right] \quad (1.37)$$

$$\dot{\eta} \quad \{ R_v \} = \sum_m \left[t^{(m)} \right]^T \int_{V_e} \left[N^{(m)} \right]^T \{ f^{V(m)} \} dV_e \quad (1.38)$$

$$\{ R_s \} = \sum_m \left[t^{(m)} \right]^T \int_{S_e} \left[N^{S(m)} \right]^T \{ f^{S(m)} \} dS_e \quad (1.39)$$

Όπου S_e είναι η φορτιζόμενη επιφάνεια του στοιχείου m .

Εάν λάβουμε υπόψη τον αθροιστικό χαρακτήρα του ανάστροφου μητρώου $\left[t^{(m)} \right]^T$ της σχέσης (1.25), τότε μπορούμε να γράψουμε τις ισοδύναμες δράσεις που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο, ως εξής:

$$\{ r_v \} = \int_{V_e} \left[N \right]^T \{ f^v \} dV_e \quad (1.40)$$

$$\{ r_s \} = \int_{S_e} \left[N^s \right]^T \{ f^s \} dS_e \quad (1.41)$$

1.7.5 Ισοδύναμες δράσεις αρχικών τάσεων και αρχικών παραμορφώσεων

Στην περίπτωση που προϋπάρχουν στον φορέα αρχικές τάσεις και αρχικές παραμορφώσεις, τότε, προκειμένου να υπολογιστεί το έργο παραμορφώσεως, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην εξίσωση (1.9) του έργου των εσωτερικών δυνάμεων η τροποποιημένη σχέση (1.22) του διανύσματος των τάσεων. Συνεπώς το έργο των εσωτερικών δυνάμεων εκφράζεται από τη σχέση:

$$W_{\text{int}} = \sum_m \int_{V_e} \left\{ \varepsilon^{(m)} \right\}^T \left[[E] \left(\left\{ \varepsilon^{(m)} \right\} - \left\{ \varepsilon_0^{(m)} \right\} \right) + \left\{ \sigma_0^{(m)} \right\} \right] dV_e \quad (1.42)$$

$$\dot{\gamma} W_{\text{int}} = \sum_m \left(\int_{V_e} \left\{ \varepsilon^{(m)} \right\}^T [E] \left\{ \varepsilon^{(m)} \right\} dV_e - \int_{V_e} \left\{ \varepsilon^{(m)} \right\}^T [E] \left\{ \varepsilon_0^{(m)} \right\} dV_e + \int_{V_e} \left\{ \varepsilon^{(m)} \right\}^T \left\{ \sigma_0^{(m)} \right\} dV_e \right) \quad (1.43)$$

Με την αντικατάσταση του διανύσματος $\left\{ \varepsilon^{(m)} \right\}$ με την παράσταση $[B^{(m)}][t^{(m)}]\{\bar{D}\}$ και το άθροισμα του πρώτου ολοκληρώματος της σχέσης (1.43) με το διάνυσμα $\{D\}^T$ επί το μητρώο στιβαρότητας του φορέα επί το διάνυσμα $\{D\}$, η σχέση (1.43) γράφεται αναλυτικότερα ως εξής:

$$W_{\text{int}} = \{\bar{D}\}^T \left[[K][D] - \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} \{B^{(m)}\}^T [E] \left\{ \varepsilon_0^{(m)} \right\} dV_e + \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} \{B^{(m)}\}^T \left\{ \sigma_0^{(m)} \right\} dV_e \right] \quad (1.44)$$

Μετά την απαλοιφή των δυνατών μετατοπίσεων $\{\bar{D}\}^T$ από την εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων προκύπτει ότι ο δεύτερος και ο τρίτος προσθετέος της σχέσης (1.44) εκφράζουν τις ισοδύναμες δράσεις στους κόμβους του φορέα λόγω της αρχικής παραμόρφωσης $\{\varepsilon_0\}$ και της αρχικής έντασης $\{\sigma_0\}$ αντίστοιχα. Έτσι έχουμε

$$\{R_{\varepsilon_0}\} = \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} [B^{(m)}]^T [E] \left\{ \varepsilon_0^{(m)} \right\} dV_e \quad (1.45)$$

$$\{R_{\sigma_0}\} = - \sum_m [t^{(m)}]^T \int_{V_e} [B^{(m)}]^T \left\{ \sigma_0^{(m)} \right\} dV_e \quad (1.46)$$

Εάν λάβουμε υπόψη και πάλι τον αθροιστικό χαρακτήρα του ανάστροφου μητρώου $[t^{(m)}]^T$, τότε μπορούμε να γράψουμε τις επιμέρους ισοδύναμες δράσεις για κάθε στοιχείο ως εξής:

$$\{r_{\varepsilon_0}\} = \int_{V_e} [B^{(m)}]^T [E] \left\{ \varepsilon_0^{(m)} \right\} dV_e \quad (1.47)$$

$$\{r_{\varepsilon_0}\} = - \int_{V_e} [B^{(m)}]^T \{\sigma^{(m)}_0\} dV_e \quad (1.48)$$

1.7.6 Γενική Εξίσωση Ισορροπίας φορέα και στοιχείων

Με βάση τις τελικές εκφράσεις των επιμέρους χαρακτηριστικών μεγεθών που υπεισέρχονται στην εξίσωση ισορροπίας του φορέα έχουμε τη σχέση

$$[K]\{D\} = \{R\} \quad (1.49)$$

$$\text{όπου} \quad [K] = \sum_m \int_{V_e} [t^{(m)}]^T [B^{(m)}]^T [E] [B^{(m)}] [t^{(m)}] dV_e \quad (1.50)$$

$$\text{και} \quad \{R\} = \{R_C\} + \{R_V\} + \{R_S\} + \{R_{\varepsilon_0}\} + \{R_{\sigma_0}\} \quad (1.51)$$

Οι επικόμβιες δράσεις $\{R_C\}$ δίνονται από τη σχέση (1.35), οι ισοδύναμες μαζικές δράσεις $\{R_V\}$ από τη σχέση (1.38), οι ισοδύναμες επιφανειακές δράσεις $\{R_S\}$ από τη σχέση (1.39), οι ισοδύναμες δράσεις λόγω αρχικής παραμόρφωσης $\{R_{\varepsilon_0}\}$ από τη σχέση (1.45) και οι ισοδύναμες δράσεις λόγω αρχικών τάσεων $\{R_{\sigma_0}\}$ από τη σχέση (1.46).

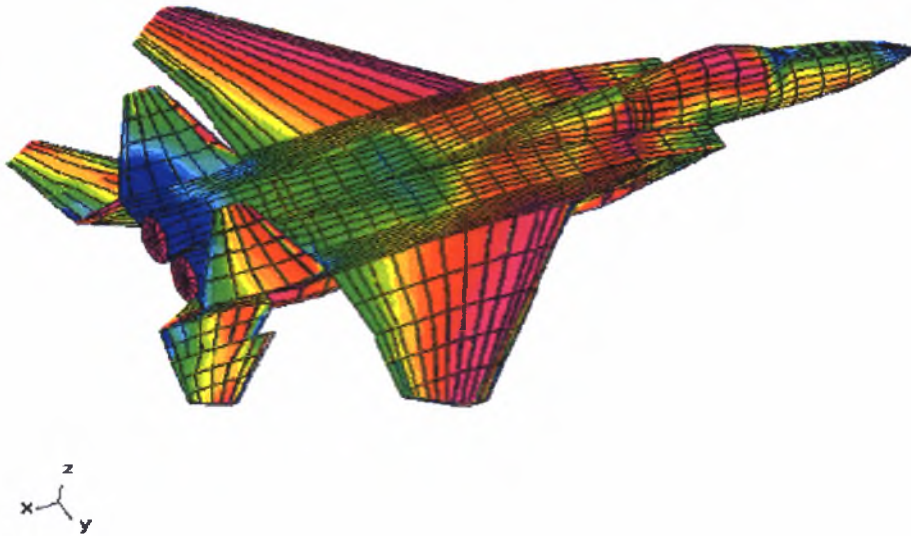
Η αντίστοιχη γενική εξίσωση ισορροπίας ενός στοιχείου γράφεται

$$[k]\{d\} = \{r\} \quad (1.52)$$

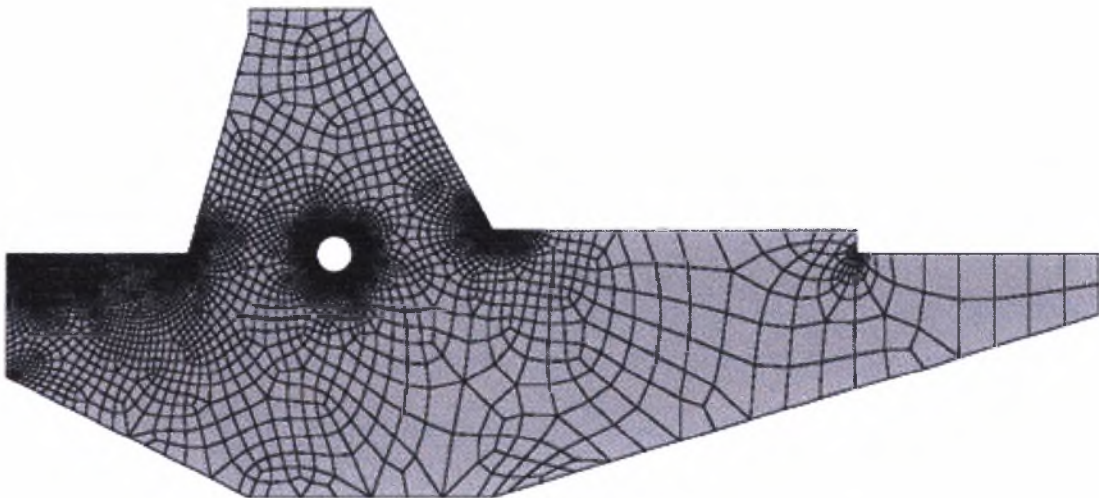
$$\text{όπου} \quad \{r\} = \{r_C\} + \{r_V\} + \{r_S\} + \{r_{\varepsilon_0}\} + \{r_{\sigma_0}\} \quad (1.53)$$

στην οποία το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου $[k]$ δίνεται από τη σχέση (1.33) και οι ισοδύναμες δράσεις $\{r_V\}, \{r_S\}, \{r_{\varepsilon_0}\}, \{r_{\sigma_0}\}$ δίνονται από τις σχέσεις (1.40), (1.41), (1.47), (1.48), αντίστοιχα.

Παρακάτω υπάρχουν σχήματα στα οποία απεικονίζονται παραδείγματα σύγχρονων και ανεκτίμητα χρήσιμων εφαρμογών των πεπερασμένων στοιχείων.



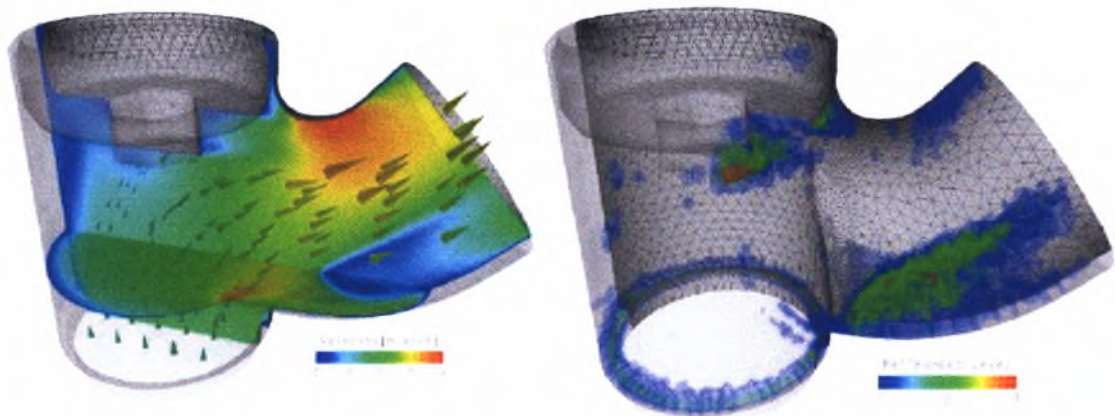
Σχήμα 1.5 Εφαρμογή της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα αεροναυπηγικής



Σχήμα 1.6 Εφαρμογή της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα Γεωτεχνικής Μηχανικής



Σχήμα 1.7 Εφαρμογή της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων σε αναλύσεις κατασκευών



Σχήμα 1.8 Εφαρμογή της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα Ρευστομηχανικής

2 Φυσικές μορφές πεπερασμένων στοιχείων (*natural mode method*)

2.1 Η προσέγγιση του προβλήματος με τη μέθοδο των φυσικών μορφών

Με τη κλασσική μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων η οποία αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, εκφράζεται το πεδίο των μετατοπίσεων $u(x, y, z)$ σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του πεπερασμένου στοιχείου ως γραμμικός συνδυασμός των καρτεσιανών επικόμβιων μετατοπίσεων ρ' , με μια σχέση της μορφής :

$$\underset{(3 \times 1)}{u}(x, y, z) = \underset{(3 \times n)}{N}(x, y, z) \underset{(n \times 1)}{\rho'} \quad (2.1)$$

όπου το n αντιπροσωπεύει το πλήθος των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας και N το μητρώο συναρτήσεως σχήματος.

Συνεπώς ένα στοιχείο σύμφωνα με την μέθοδο των φυσικών μορφών μπορεί να παραμορφωθεί με n διαφορετικές μορφές. Έτσι η συνολική παραμόρφωσή του μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω μορφών, δηλαδή:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (2.2)$$

Αν ρ είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων των φυσικών μορφών, τότε χρησιμοποιώντας ένα μητρώο ω του οποίου η έκφραση είναι ανάλογη με το μητρώο συναρτήσεων σχήματος $N(x, y, z)$, για το καρτεσιανό σύστημα, παράγεται η σχέση :

$$\underset{(3 \times 1)}{u} = \begin{bmatrix} \omega_u^1 & \omega_u^2 & \dots & \omega_u^n \\ \omega_v^1 & \omega_v^2 & \dots & \omega_v^n \\ \omega_w^1 & \omega_w^2 & \dots & \omega_w^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \underset{(3 \times n)}{\omega} \underset{(n \times 1)}{\rho} \quad (2.3)$$

Οι φυσικές μετατοπίσεις ρ παράγονται από τις επικόμβιες καρτεσιανές μετατοπίσεις ρ' με τη βοήθεια ενός μητρώου A το οποίο εξαρτάται, όπως αναφέρεται παρακάτω, από τη γεωμετρία των στοιχείων, οπότε:

$$\rho = A\rho' \Rightarrow \rho = A^{-1}\rho' = \alpha\rho' \quad (2.4)$$

ή $\alpha = A^{-1}$ και $\rho = \alpha\rho'$

οπότε :

$$u = \omega\rho = \omega\alpha\rho' \quad (2.5)$$

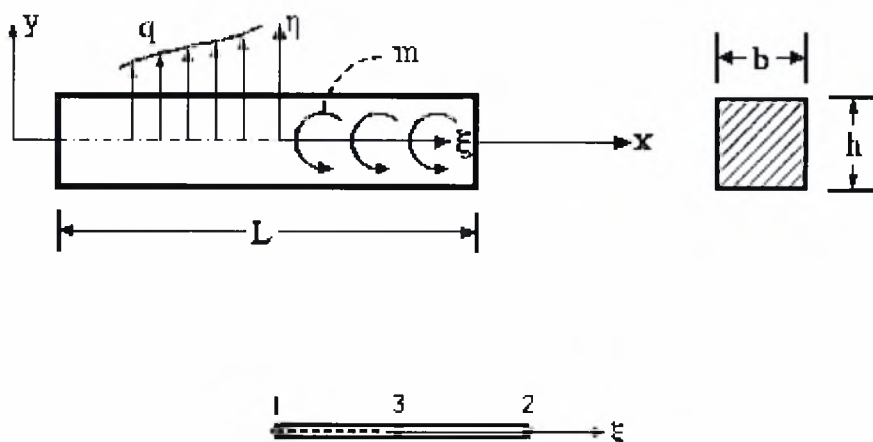
άρα τελικά :

$$N = \omega\alpha \quad (2.6)$$

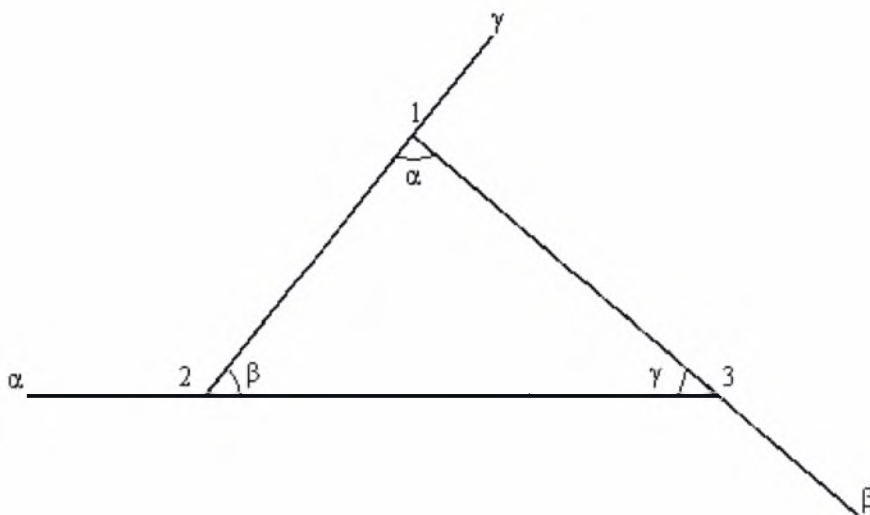
Οι φυσικές μετατοπίσεις για κάθε στοιχείο διακρίνονται πάντα σε **φυσικές μορφές στερεού σώματος ρ_0 (natural rigid body modes)** οι οποίες δεν έχουν συνεισφορά στην ενέργεια παραμόρφωσης (Σχήματα 2.2-2.3) και σε **φυσικές μορφές παραμόρφωσης ρ_N (natural straining modes)** οι οποίες περιγράφουν πλήρως την παραμορφωσιακή κατάσταση του στοιχείου.

2.2 Το Φυσικό μητρώο ακαμψίας

Με τη μέθοδο των φυσικών μορφών υπολογίζεται για κάθε στοιχείο το μητρώο ακαμψίας στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Το πια θα είναι η μορφή του φυσικού συστήματος εξαρτάται από τη γεωμετρία του στοιχείου. Για ένα στοιχείο δοκού ή ένα στοιχείο δικτυώματος το φυσικό σύστημα αποτελείται αποκλειστικά από τη φυσική συντεταγμένη ξ που «τρέχει» κατά μήκος του στοιχείου (Σχήμα 2.0), ενώ για ένα στοιχείο επίπεδης έντασης που αποτελείται από τρεις κόμβους ή ένα τριγωνικό στοιχείο πλάκας ή κελύφους, οι φυσικοί άξονες α, β, γ είναι παράλληλοι στις τρεις πλευρές του τριγώνου (Σχήμα 2.1). Η χρησιμοποίηση ενός φυσικού συστήματος συντεταγμένων επιτρέπει τον προσδιορισμό του πεδίου των μετατοπίσεων μέσω των φυσικών μορφών.



Σχήμα 2.0 Το φυσικό σύστημα για ένα στοιχείο δικτυώματος και ένα στοιχείο δοκού το οποίο αποτελείται αποκλειστικά από τη φυσική συντεταγμένη ξ που «τρέχει» κατά μήκος του στοιχείου.



Σχήμα 2.1 Το φυσικό σύστημα για ένα τριγωνικό στοιχείο πλάκας ή κελύφους, όπου οι φυσικοί άξονες α, β, γ είναι παράλληλοι στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

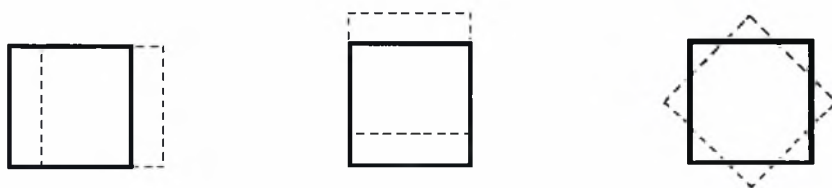
Είναι πολύ σημαντικό κατά τη διατύπωση ενός πεπερασμένου στοιχείου να έχει εξασφαλισθεί ότι οι φυσικές μορφές στερεού σώματος δεν προκαλούν παραμόρφωση και κατά συνέπεια δεν θα συνεισφέρουν στην ενέργεια παραμόρφωσης. Με τη μέθοδο των φυσικών μορφών το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με το διαχωρισμό των μορφών σε **μορφές στερεού σώματος** και σε **μορφές παραμόρφωσης**. Μόνο οι μορφές παραμόρφωσης εισάγονται στον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας.

Έτσι για το γενικευμένο διάνυσμα επικόμβιων φυσικών μετατοπίσεων ρ , στο οποίο περιλαμβάνονται τόσο οι μορφές παραμόρφωσης όσο και οι μορφές στερεού σώματος, απαιτείται μια σχέση μοναδική και αντιστρέψιμη με το καρτεσιανό διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων ρ' , τέτοια ώστε :

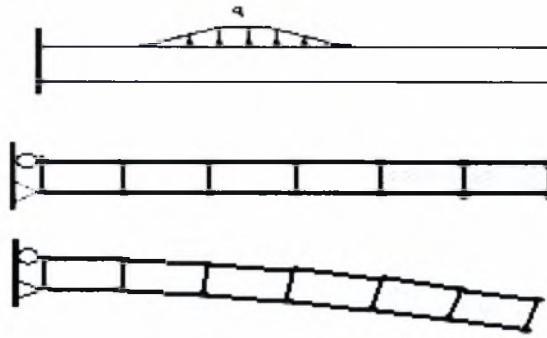
$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \bar{\alpha}_N \end{bmatrix} \rho' = \alpha \rho' \Rightarrow \begin{aligned} \rho_0 &= \alpha_0 \rho'_0 \\ \rho_N &= \bar{\alpha}_N \rho'_N \end{aligned} \quad (2.7)$$

ή

$$\rho' = \alpha^{-1} \rho = \begin{bmatrix} A_0 & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_N \end{bmatrix} = A \rho \Rightarrow A = \alpha^{-1} \quad (2.8)$$



Σχήμα 2.2 Κινήσεις στερεού σώματος στοιχείου επίπεδης έντασης. Μεταφορικές κατά x,y και περιστροφική κατά τον άξονα z



Σχήμα 2.3 Στοιχεία αριστερά και κάτω του φορτίου μετατοπίζονται και παραμορφώνονται, στοιχεία δεξιά του φορτίου μετατοπίζονται ως στερεά σώματα

Για κάθε διάνυσμα μετατοπίσεων είτε φυσικών, είτε καρτεσιανών υπάρχει το αντίστοιχο διάνυσμα φόρτισης P_0 , P_N και P' τέτοιο ώστε το έργο των εξωτερικών δυνάμεων να προκύπτει από το γινόμενο των δυνάμεων αυτών επί τις αντίστοιχες μετατοπίσεις. Γνωρίζοντας ότι το έργο παραμόρφωσης παραμένει σταθερό ανεξάρτητα από το σύστημα στο οποίο βρισκόμαστε και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (2.7)-(2.8) μπορεί να γραφτεί :

$$\text{Έργο Παραμόρφωσης} \quad \left\{ \begin{array}{l} P'^t \delta p' = P^t \delta p = P'^t \alpha \delta p' \\ \rightarrow P' = \alpha^t P = \alpha_0^t P_0 + \bar{\alpha}_N^t P_N \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\text{από όπου συνάγεται το συμπέρασμα ότι : } \rightarrow P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_N \end{bmatrix} = A^t P' = \begin{bmatrix} A_0^t \\ A_N^t \end{bmatrix} P' \quad (2.10)$$

Φυσικές Μετατοπίσεις

Φυσικές Δυνάμεις

Καρτεσιανές Δυνάμεις-Μετατοπίσεις

$$p_0 = \alpha_0 p'$$

$$P_0 = A_0^t P'$$

$$P' = \alpha_0^t P_0 + \bar{\alpha}_N^t P_N$$

$$p_N = \bar{\alpha}_N p'$$

$$P_N = A_N^t P'$$

$$p' = A_0 p_0 + A_N p_N$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι τόσο η σύνδεση των φυσικών και καρτεσιανών μετατοπίσεων όσο και η σχέση των φυσικών και των καθολικών φορτίων, γίνεται με τη βοήθεια των μητρώων α , A . Συνήθως αυτά τα μητρώα εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία του στοιχείου και μπορούν εύκολα να διατυπωθούν. Αγνοώντας την ύπαρξη αρχικών παραμορφώσεων, στο φυσικό σύστημα μπορεί να γραφτεί :

$$\varepsilon = \alpha_N \rho_N \quad (2.11)$$

όπου ε το διάνυσμα των ανοιγμένων ελαστικών παραμορφώσεων και ρ_N είναι το διάνυσμα των φυσικών παραμορφωσιακών μορφών. Το διάνυσμα α_N σύμφωνα με το συμβολισμό του Κεφαλαίου 1 αποτελεί το μητρώο Παραμόρφωσης [B]. Ο διαφορετικός συμβολισμός οφείλεται στο ότι κατά τη συγγραφή αυτής της διπλωματικής εργασίας, διατηρήθηκαν σε αυτό και στα επόμενα Κεφάλαια οι συμβολισμοί του Ι.Αργύρη (1995) που είναι λίγο διαφορετικοί από τους συμβατικούς συμβολισμούς. Ωστόσο όποτε συμβαίνει αυτό θα δίνονται οι απαραίτητες διευκρινήσεις και αντιστοιχίες. Η έκφραση της αρχής των δυνατών έργων λοιπόν γίνεται :

$$\int_V \sigma' \delta \varepsilon dV = \int_V \varepsilon' \kappa_{ct} \delta \varepsilon dV = P' \delta \rho \quad (2.12)$$

Στο δεξί μέρος περιλαμβάνονται τα φορτία (χωρικά, επιφανειακά, συγκεντρωμένα) και αναφέρονται στο φυσικό σύστημα. Εισάγοντας την εξίσωση (2.11) στα παραπάνω ολοκληρώματα, έχουμε :

$$\begin{aligned} \delta \rho_N' \left[\int_V \sigma' \alpha_N dV \right] &= \delta \rho_N' \left[\int_V \alpha_N' \kappa_{ct} \alpha_N dV \right] \rho_N \\ &= P_0' \delta \rho_0 + P_N' \delta \rho_N = P_N' \delta \rho_N \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου κ_{ct} είναι το καταστατικό μητρώο και αναφέρεται στο φυσικό σύστημα. Από τη σχέση (2.13), προκύπτει :

$$P_0 = 0 \quad (2.14)$$

και

$$\left[\int_V \alpha_N^t \kappa_{ct} \alpha_N dV \right] \rho_N = \left[\int_V \sigma^t \alpha_N dV \right] \Rightarrow k_N \rho_N = P_N \quad (2.15)$$

Η εξίσωση (2.14) δηλώνει ότι οι δυνάμεις στερεού σώματος που δρουν πάνω στο στοιχείο πρέπει να είναι μηδέν. Είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε το **φυσικό ελαστικό μητρώο ακαμψίας** k_N για ένα στοιχείο, ως :

$$k_N = \int_V \left[\alpha_N^t \kappa_{ct} \alpha_N \right] dV \quad (2.16)$$

και τα φυσικά εντατικά μεγέθη, ως :

$$P_N = \int_V \left[\alpha_N^t \sigma \right] dV \quad (2.17)$$

έτσι ώστε :

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, \\ k_N \rho_N &= P_N \end{aligned} \quad (2.18)$$

Το μητρώο k_N είναι το φυσικό μητρώο ακαμψίας. Αφού σε πρώτη φάση μορφωθεί το k_N στη συνέχεια, με απλούς μετασχηματισμούς, μετασχηματίζεται πρώτα στο τοπικό και τελικά στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

$$k_N \rightarrow K_{\text{local}} \rightarrow \overline{K}_{\text{global}}$$

Η παραπάνω μεθοδολογία που εδώ αναπτύχθηκε συνοπτικά, θα ακολουθηθεί στη συνέχεια στα Κεφάλαια 4 και 5 και θα αναπτυχθεί αναλυτικά κατά τη διατύπωση των φυσικών μητρώων ακαμψίας για το τριγωνικό στοιχείο κελύφους TRIC.

2.3 Φυσικές μορφές για επιλεγμένα στοιχεία

Οι φυσικές μορφές οφείλουν να ικανοποιούν όλες τις κινηματικές συνθήκες στα σύνορα των στοιχείων. Δεν είναι μοναδικές ή πλήρεις αλλά πάντα είναι ίσες με τη διαφορά του πλήθους των καθολικών βαθμών ελευθερίας και του πλήθους των κινήσεων στερεού σώματος που δύναται το στοιχείο να εκτελέσει. Παρακάτω αναφέρονται οι φυσικές μορφές μερικών στοιχείων.

• Πεπερασμένο στοιχείο δικτυώματος στο χώρο

Το τρισδιάστατο στοιχείο δικτυώματος έχει 2 κόμβους και τρεις καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας (u, v, w) σε κάθε κόμβο, δηλαδή συνολικά 6 βαθμούς ελευθερίας. Αν θεωρήσουμε ότι ο τοπικός άξονας x' είναι παράλληλος προς τον διαμήκη άξονα του στοιχείου, τότε το στοιχείο μπορεί να έχει 5 μορφές στερεού σώματος. Αυτές είναι τρεις μετακινήσεις κατά τις διευθύνσεις x', y', z' και δυο στροφές περί τους τοπικούς άξονες y', z' . Αφαιρώντας τις μορφές στερεού σώματος από το πλήθος των συνολικών βαθμών ελευθερίας, μένει μόνο ένας βαθμός ελευθερίας, δηλαδή μια φυσική μορφή, η αξονική φυσική μορφή. Έτσι το φυσικό μητρώο ακαμψίας στοιχείου δικτυώματος στο χώρο είναι μόνο (1×1) .

• Πεπερασμένο στοιχείο δοκού στο χώρο

Το στοιχείο δοκού στο χώρο έχει δυο κόμβους και έξι καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας ($u, v, w, \theta, \varphi, \psi$) σε κάθε κόμβο, δηλαδή συνολικά 12 βαθμούς ελευθερίας. Αν θεωρήσουμε ότι ο τοπικός άξονας x' είναι παράλληλος προς τον διαμήκη άξονα του στοιχείου και διέρχεται από το κέντρο κάθε διατομής, τότε το στοιχείο μπορεί να έχει έξι πιθανές μορφές στερεού σώματος. Αυτές είναι τρεις μετακινήσεις κατά τις διευθύνσεις x', y', z' και τρεις στροφές περί τους τοπικούς άξονες x', y', z' . Αφαιρώντας τις μορφές στερεού σώματος από το πλήθος των συνολικών βαθμών ελευθερίας, μένουν έξι

βαθμοί ελευθερίας, οι οποίοι περιγράφουν τον τρόπο παραμόρφωσης του στοιχείου. Το φυσικό μητρώο ακαμψίας στοιχείου δοκού στο χώρο είναι διαστάσεων (6×6) .

- **Πεπερασμένο τριγωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης**

Το τριγωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης έχει τρεις κόμβους και δυο καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας (u, v) σε κάθε κόμβο, δηλαδή συνολικά έξι βαθμούς ελευθερίας. Αν θεωρήσουμε ότι το κέντρο του τοπικού καρτεσιανού συστήματος βρίσκεται στο κέντρο βάρους του στοιχείου, τότε το στοιχείο μπορεί να έχει τρεις πιθανές μορφές στερεού σώματος. Αυτές είναι δυο μετακινήσεις κατά τις διευθύνσεις x' y' και μια στροφή περί τον τοπικό άξονα z' ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του στοιχείου. Έτσι, τρεις φυσικές μορφές αρκούν για να περιγράψουν τον τρόπο παραμόρφωσης του στοιχείου. Αυτές οι μορφές περιλαμβάνουν και την αξονική παραμόρφωση κατά μήκος των τριών πλευρών του τριγώνου. Το φυσικό μητρώο ακαμψίας τριγωνικού στοιχείου επίπεδης έντασης είναι διαστάσεων (3×3) .

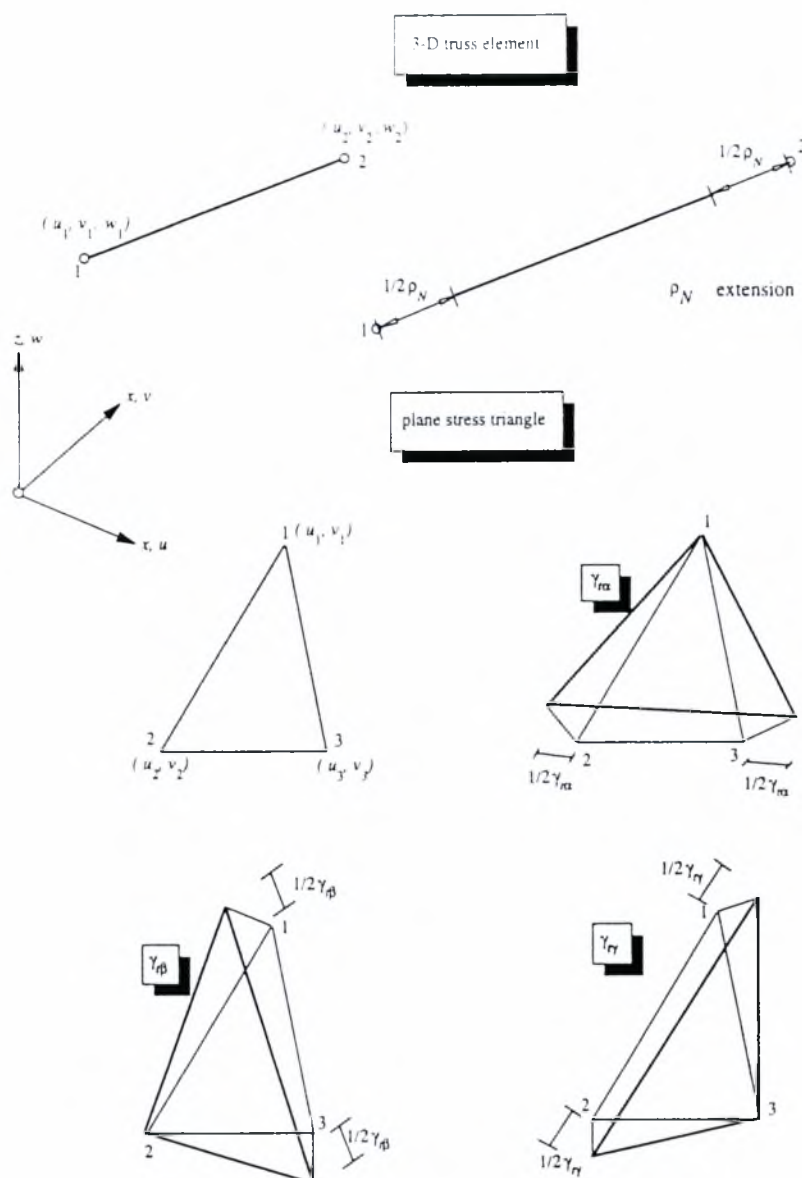
- **Πεπερασμένο στοιχείο πλάκας και κελύφους**

Τα τριγωνικά στοιχεία πλάκας και κελύφους έχουν τρεις κόμβους και έξι καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας ($u, v, w, \theta, \varphi, \psi$) σε κάθε κόμβο, δηλαδή συνολικά δεκαοκτώ βαθμούς ελευθερίας. Το κέντρο του τοπικού καρτεσιανού συστήματος βρίσκεται στο κέντρο βάρους του στοιχείου, και το στοιχείο μπορεί να κινηθεί στο χώρο με έξι μορφές στερεού σώματος. Αφαιρώντας τις έξι μορφές στερεού σώματος από τους δεκαοκτώ συνολικά βαθμούς ελευθερίας μένουν μόνο δώδεκα βαθμοί ελευθερίας. Έτσι, δώδεκα φυσικές μορφές περιγράφουν την παραμόρφωση του στοιχείου. Το φυσικό μητρώο ακαμψίας πλάκας και κελύφους είναι διαστάσεων (12×12) .

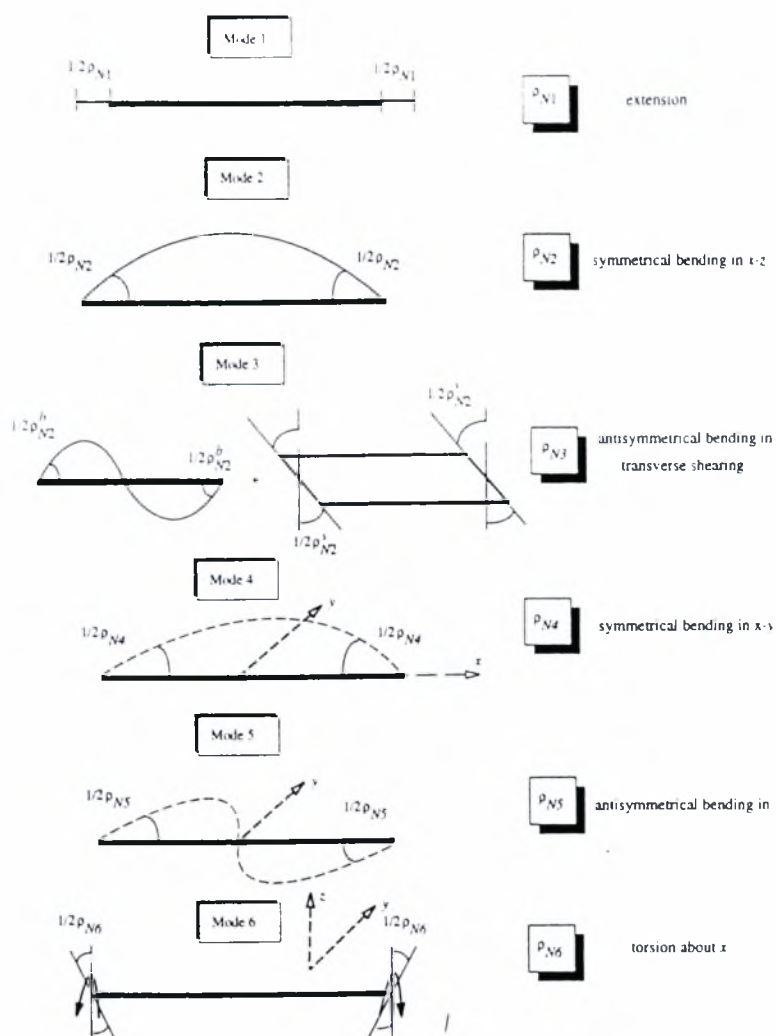
- **Τετραεδρικό πεπερασμένο στοιχείο**

Το τετραεδρικό πεπερασμένο στοιχείο έχει τέσσερις κόμβους και τρεις καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας (u, v, w), σε κάθε κόμβο, δηλαδή συνολικά δώδεκα βαθμούς ελευθερίας. Το στοιχείο μπορεί να κινηθεί στο χώρο με έξι μορφές στερεού σώματος, οι οποίες είναι τρεις μετατοπίσεις και τρεις στροφές. Αφαιρώντας το πλήθος των έξι μορφών στερεού σώματος από τους δώδεκα βαθμούς ελευθερίας μένουν μόνο έξι βαθμοί ελευθερίας που περιγράφουν την παραμόρφωση του τετραεδρικού στοιχείου. Τελικά το φυσικό μητρώο θα είναι διαστάσεων (6×6) .

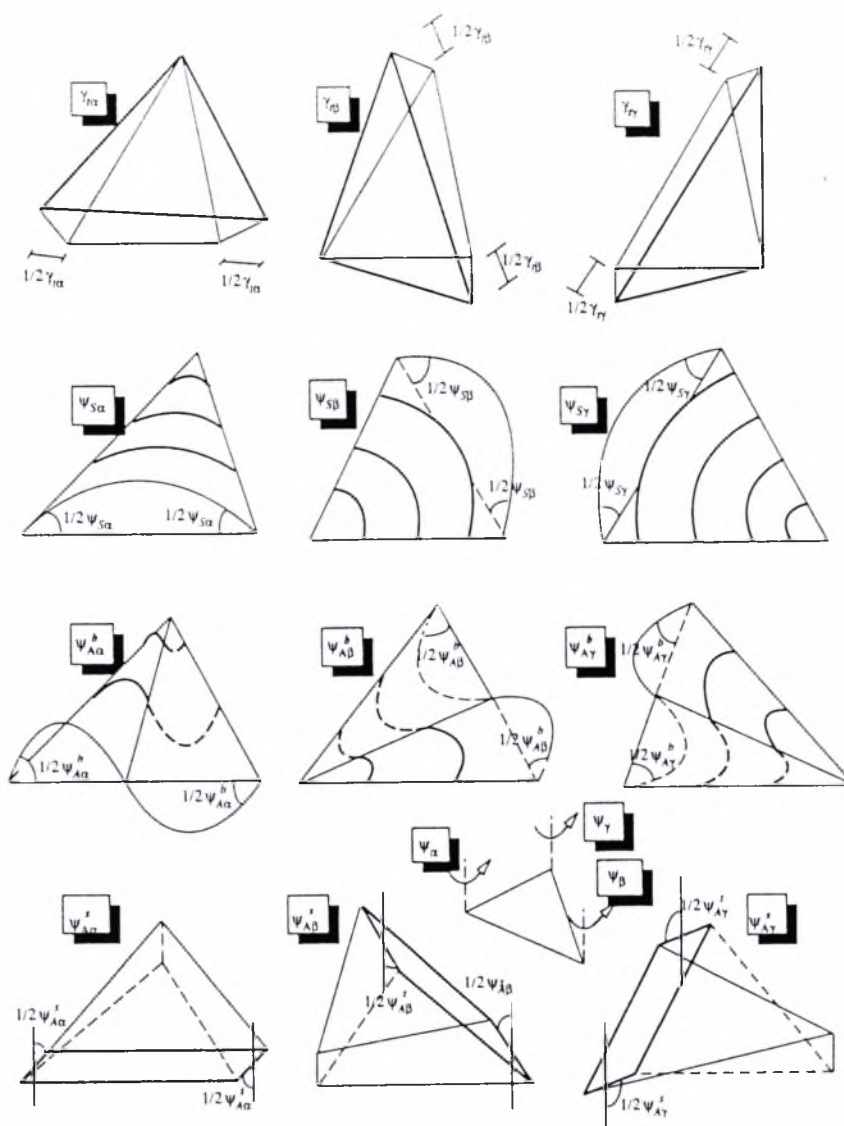
Στα σχήματα 2.4 έως και 2.7 φαίνονται οι φυσικές μορφές παραμόρφωσης για τα επιλεγέντα στοιχεία. Τονίζεται ότι τα φυσικά μητρώα αφού υπολογισθούν, μετασχηματίζονται, όπως προαναφέρθηκε με απλές μητρωικές πράξεις πρώτα στο τοπικό και τελικά στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα.



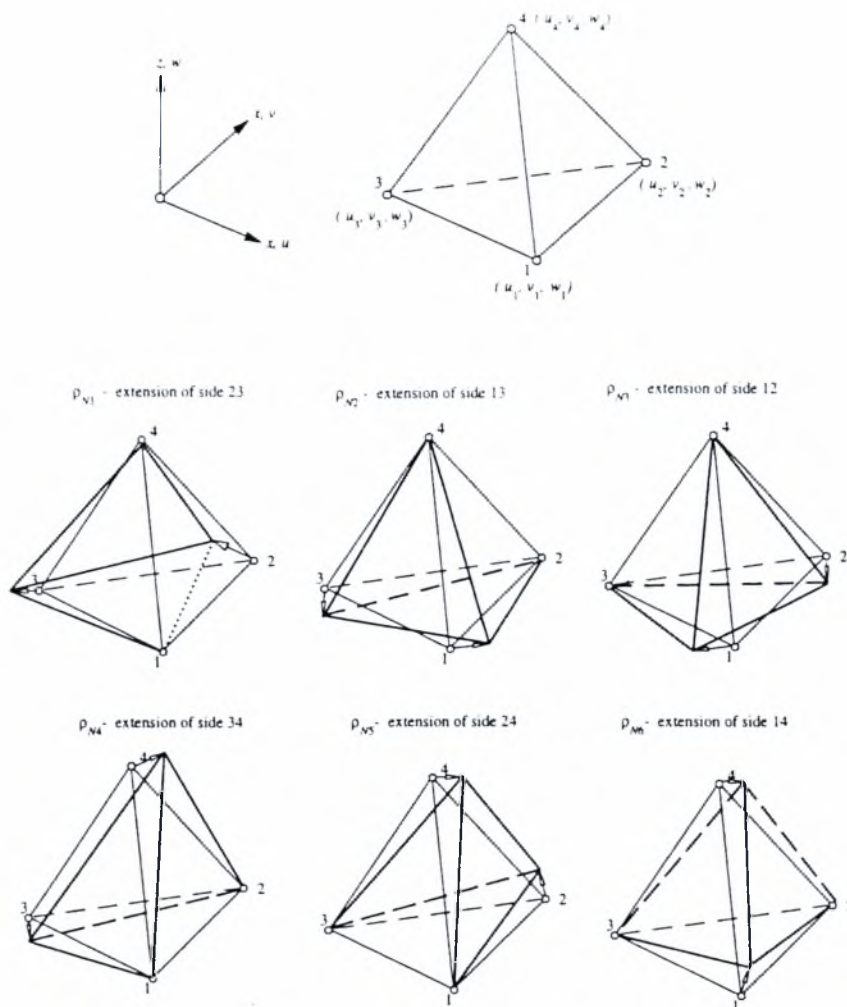
Σχήμα 2.4: Φυσικές παραμορφωσιακές μορφές για το στοιχείο δικτύωματος και το τριγωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης



Σχήμα 2.5: Φυσικές μορφές για το στοιχείο δοκού στο χώρο.



Σχήμα 2.6: Φυσικές μορφές τριγωνικού στοιχείου πλάκας και τριγωνικού στοιχείου κελύφους



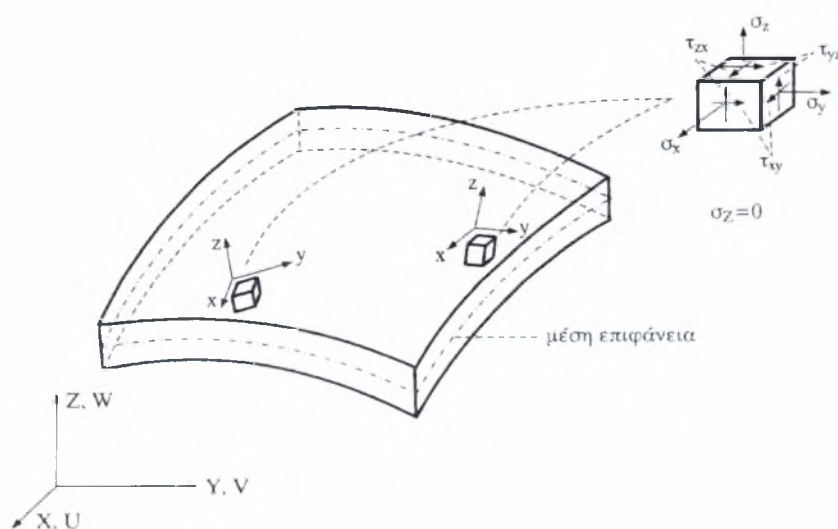
Σχήμα 2.7: Φυσικές μορφές τετραεδρικού στοιχείου

3

Θεωρία Αναλυτικού Υπολογισμού Παχιών και Λεπτών Κελυφών

3.1 Είδη Κελυφών

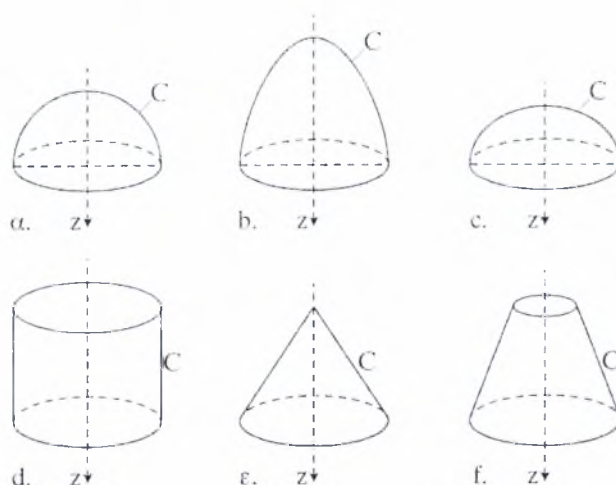
Τα κελύφη είναι λεπτοί επιφανειακοί φορείς των οποίων η μέση επιφάνεια είναι καμπύλη και το πάχος τους, t είναι αρκετά μικρότερο σε σχέση με το άνοιγμά τους και την ακτίνα καμπυλότητά τους R . Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για κελύφη που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον όπως τρούλοι ναών, κυλινδρικές οροφές, σιλό, δοχεία πίεσης, δεξαμενές, ο λόγος t/R είναι μικρότερος από $1/500$. Για την μελέτη των κελυφών απαραίτητη είναι η γνώση της γεωμετρίας του σχήματός τους. Αυτή μπορεί να παρασταθεί από μια συνάρτηση $F(x,y,z)$ του μέσου επιπέδου το οποίο ορίζεται ως το επίπεδο που διχοτομεί σε κάθε σημείο το πάχος t του κελύφους και το ίδιο το πάχος t αυτού (Σχήμα 3.0). Από την άποψη αυτή διακρίνουμε τις παρακάτω ομάδες κελυφών:



Σχήμα 3.0 Μέση επιφάνεια στοιχείου κελύφους

1) Κελύφη εκ περιστροφής

Η μέση επιφάνεια ενός κελύφους εκ περιστροφής σχηματίζεται από την περιστροφή μιας επίπεδης καμπύλης C γύρω από έναν άξονα z ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδό της. Η γενέτειρα καμπύλη C καλείται μεσημβρινός. Εάν ο μεσημβρινός είναι κύκλος, παραβολή ή έλλειψη, τότε προκύπτει μια σφαιρική επιφάνεια (Σχήμα 3.1α) ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής (Σχήμα 3.1b) ή ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής (Σχήμα 3.1c). Εάν ο μεσημβρινός είναι μια ευθεία γραμμή τότε προκύπτει ένας κύλινδρος (Σχήμα 3.1d) ή μια κωνική επιφάνεια (Σχήμα 3.1ε, f).

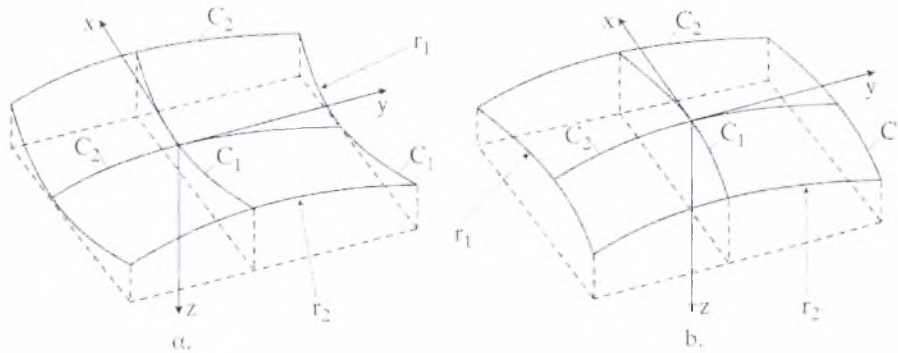


Σχήμα 3.1 Κελύφη εκ περιστροφής

2) Κελύφη εκ μετακινήσεως

Η μέση επιφάνεια του κελύφους προκύπτει από την μετακίνηση μιας επίπεδης καμπύλης C_1 (γενέτειρας) επάνω σε μια επίπεδη καμπύλη C_2 (οδηγός). Το ρόλο των δυο αυτών καμπυλών μπορούμε επίσης να τον δούμε και αντίστροφα. Οι ακτίνες καμπυλότητας r_1 της C_1 και r_2 της C_2 μπορεί να έχουν την ίδια φορά (Σχήμα 3.2b) ή αντίθετη φορά (Σχήμα 3.2α). Εάν οι καμπύλες C_1, C_2 είναι και οι δυο τετραγωνικές παραβολές τότε η επιφάνεια που προκύπτει καλείται παραβολοειδές. Τα παραβολοειδή υποδιαιρούνται σε ελλειπτικά, υπερβολικά ή κυκλικά παραβολοειδή αν από την τομή

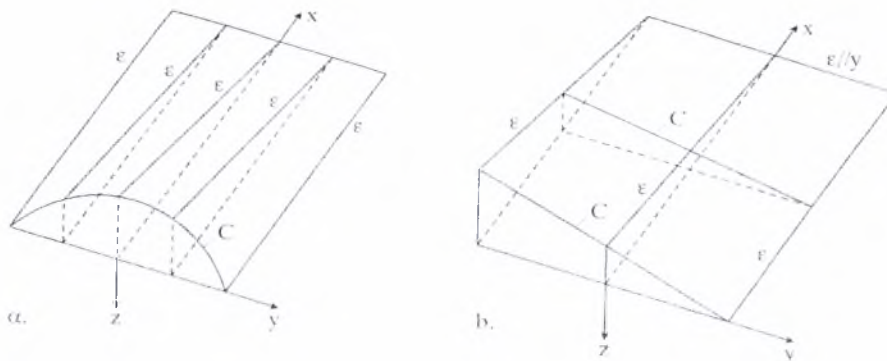
του παραβολοειδούς με ένα οριζόντιο επίπεδο ($z=\text{σταθερό}$) προκύπτει μια έλλειψη, μια υπερβολή ή ένας κύκλος αντίστοιχα.



Σχήμα 3.2 Κελύφη εκ μετακινήσεως

3) Κωνοειδή Κελύφη (λοξά κελύφη)

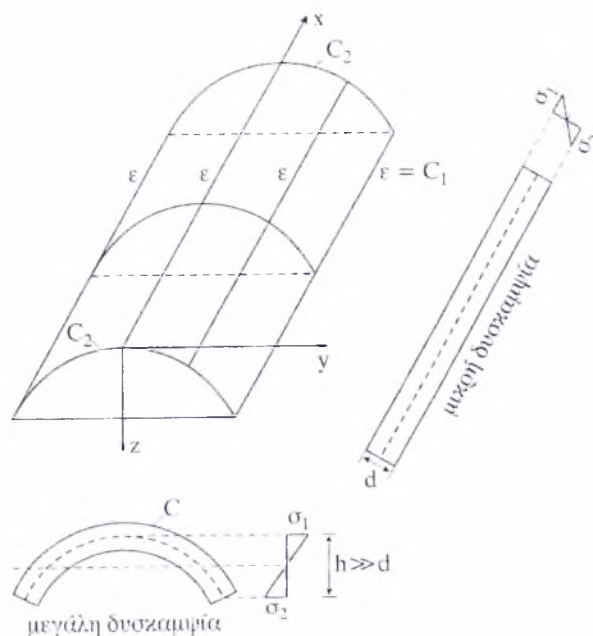
Η μέση επιφάνεια του κελύφους προκύπτει από την μετακίνηση μιας ευθείας ϵ (γενέτειρα) κατά μήκος μιας επίπεδης καμπύλης C παράλληλης στον άξονα y (καμπύλη οδηγός) (Σχήμα 3.3). Εάν η οδηγός καμπύλη C είναι έλλειψη, παραβολή ή κύκλος τότε προκύπτει μια ελλειπτική, παραβολική ή κυκλική κωνοειδής επιφάνεια αντίστοιχα (Σχήμα 3.3α). Στην περίπτωση που η καμπύλη C είναι μια ευθεία κεκλιμένη σχετικά με την ευθεία ϵ τότε προκύπτει ένα λοξό υπερβολικό παραβολοειδές (Σχήμα 3.3b).



Σχήμα 3.3 Κωνοειδή Κελύφη

4) Κυλινδρικά Κελύφη

Η μέση επιφάνεια του κελύφους προκύπτει από την μετακίνηση μιας επίπεδης καμπύλης C_2 κατά μήκος μιας ευθείας $\varepsilon=C_1$ (Σχήμα 3.4). Τα κυλινδρικά κελύφη είναι επομένως κελύφη εκ μεταφοράς τα οποία έχουν οδηγό μια ευθεία $\varepsilon=C_1$. Η ταξινόμηση των κυλινδρικών κελυφών σαν ιδιαίτερης ομάδας γίνεται λόγω των συχνών εφαρμογών τους στις κατασκευές. Όσον αφορά δε τη στατική τους συμπεριφορά, μόνο κατά την κάθετη διεύθυνση εμφανίζουν μεγάλη δυσκαμψία έναντι κάμψης ενώ κατά την οριζόντια διεύθυνση έχουν μικρή δυσκαμψία. Στα κελύφη με διπλή καμπυλότητα αντιθέτως (Σχήμα 3.2), η δυσκαμψία έναντι κάμψης είναι μεγάλη και για την κατά μήκος και για την κάθετη διεύθυνση.

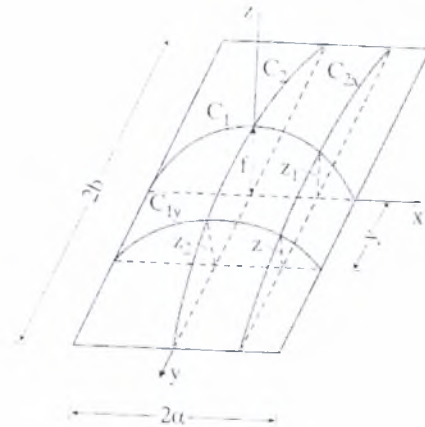


Σχήμα 3.4 Κυλινδρικά Κελύφη

5) Ορθογώνια κελύφη με οριζόντια σύνορα

Η μέση επιφάνεια των κελυφών αυτών σχηματίζεται με τον τρόπο που δείχνεται στο σχήμα 3.5. Οι επίπεδες καμπύλες C_1 και C_2 που βρίσκονται στα επίπεδα (x,z) και (y,z) αντίστοιχα ορίζονται από τις εξισώσεις: $C_1: z1=f(x)$ και $C_2: z2=f(x)$

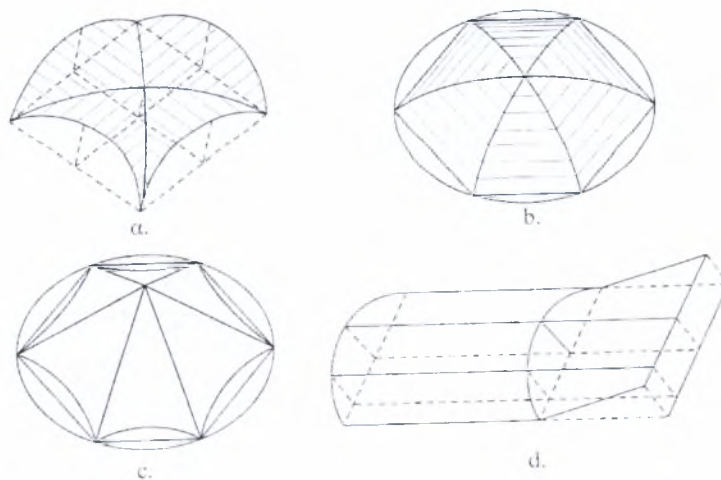
Ένα κάθετο επίπεδο $y=\text{σταθερό}$ τέμνει την μέση επιφάνεια κατά μήκος μιας καμπύλης C_{1y} όμοια της C_1 . Ομοίως ένα κάθετο επίπεδο $x=\text{σταθερό}$ τέμνει την μέση επιφάνεια κατά μήκος μιας καμπύλης C_{2x} όμοιας με την C_2 .



Σχήμα 3.5 Ορθογώνια κελύφη με οριζόντια άκρα

5) Σύνθετα Κελύφη

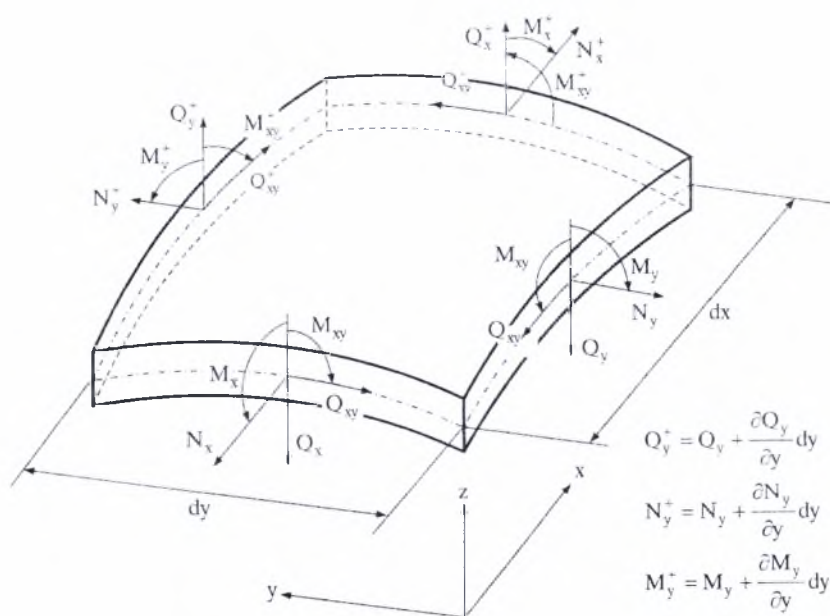
Τα κελύφη αυτά προκύπτουν από τον συνδυασμό δύο ή και περισσότερων ειδών των προαναφερθέντων κατηγοριών κελυφών (Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6 Σύνθετα Κελύφη

3.2 Εντατική Κατάσταση Κελυφών

Τα κελύφη παρουσιάζουν μεγάλες αναλογίες με τις πλάκες. Γενικά τα κελύφη μπορούν να θεωρηθούν σαν πλάκες οι οποίες απέκτησαν καμπυλότητα. Έτσι τα κελύφη συνδυάζουν την συμπεριφορά δίσκου ως προς την μεμβρανική τους λειτουργία και συμπεριφορά πλάκας ως προς την καμπτική τους λειτουργία (Σχήμα 3.7).



Σχήμα 3.7 Εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους του κελύφους

Η καμπτική λειτουργία στο κέλυφος αντιστοιχεί στις καμπτικές τάσεις της πλάκας και προκαλεί τις καμπτικές ροπές M_x , M_y τις ροπές συστροφής $M_{xy}=M_{yx}$ (3.1) και τις τέμνουσες δυνάμεις του κελύφους Q_x , Q_y (3.2).

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad , \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad \text{και} \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (3.1)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz \quad , \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (3.2)$$

Αντίθετα η εντατική εκείνη κατάσταση ενός κελύφους κατά την οποία οι ροπές κάμψης και συστροφής καθώς και οι διατμητικές δυνάμεις είναι μηδέν και τα μόνα φορτία διατομής της εσωτερικής εντατικής κατάστασης είναι τα N_x , N_y , $Q_{xy}=Q_{yx}$ (3.3), καλείται κατάσταση μεμβράνης. Στην κατάσταση μεμβράνης οι τάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στη διατομή και έχουν συνισταμένη που διέρχεται από το κέντρο της και είναι εφαπτόμενη της μέσης επιφάνειας.

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz, \quad Q_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (3.3)$$

3.3 Πεπερασμένα Στοιχεία Κελύφους

Γενικά τα κελύφη μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες βάση των γεωμετρικών τους χαρακτηριστικών, τα παχιά και τα λεπτά. Πρακτικά μπορούν να θεωρηθούν παχιά τα κελύφη εκείνα τα οποία $t/R > 1/15$. Υπάρχουν πολλές θεωρίες κελυφών, ανάλογα με τις παραδοχές που γίνονται για την τελική διατύπωση των εξισώσεων του κελύφους. Η κλασσική θεωρία κελυφών αναφέρεται στα λεπτά κελύφη, στα οποία η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση αμελείται. Στα παχιά κελύφη, λαμβάνεται υπόψη η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση και σε ορισμένες περιπτώσεις η ανηγμένη παραμόρφωση ϵ_z , οπότε το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα τρισδιάστατης ελαστικότητας. Τα πεπερασμένα στοιχεία κελυφών που έχουν κατά καιρούς προταθεί κατατάσσονται γενικά σε τρεις κατηγορίες :

- I. Επίπεδα στοιχεία τα οποία συνδυάζουν τις ιδιότητες στοιχείου επίπεδης έντασης και στοιχείου πλάκας.
- II. Καμπύλα στοιχεία τα οποία διατυπώνονται μέσω της κλασσικής θεωρίας κελυφών.
- III. Στοιχεία τα οποία προέρχονται από εκφυλισμό, ως προς τη διεύθυνση του άξονα z , πεπερασμένων στοιχείων τρισδιάστατης ελαστικότητας.

Επίπεδα τριγωνικά στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για την ανάλυση κελυφών. Τα στοιχεία αυτά προσομοιώνουν τα κελύφη ως πολυεδρικές επιφάνειες, έχουν το πλεονέκτημα ότι η διατύπωση των χαρακτηριστικών τους εξισώσεων είναι σχετικά απλή, ενώ ικανοποιούν τον έλεγχο συρραφής και δεν εμφανίζουν παραμορφώσεις

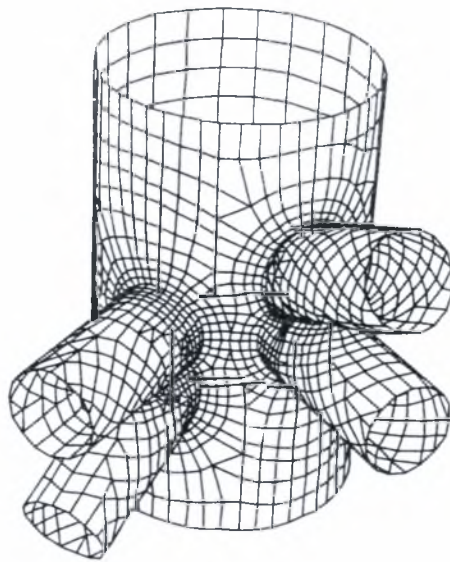
όταν μετατοπίζονται ως στερεά σώματα. Τα περισσότερα από αυτά όμως παρουσιάζουν το μειονέκτημα ότι αδυνατούν να προσομοιώσουν την σύζευξη των καμπτικών και των μεμβρανικών παραμορφώσεων που ενυπάρχει σε όλα τα σημεία του κελύφους.

Τα καμπύλα πεπερασμένα στοιχεία έχουν το πλεονέκτημα της μεγαλύτερης ακρίβειας η οποία κυμαίνεται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της θεωρίας κελυφών που υιοθετούν. Είναι όμως εξαιρετικά πολύπλοκη η διατύπωση των χαρακτηριστικών εξισώσεων στην οποία εμπλέκεται και η καμπύλη γεωμετρία του κελύφους.

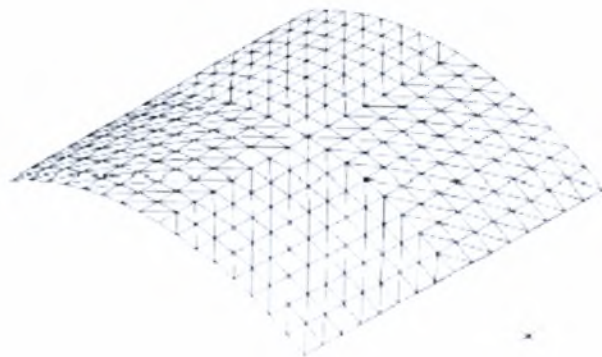
Τα στοιχεία που προκύπτουν από εκφυλισμό πεπερασμένων στοιχείων τρισδιάστατης ελαστικότητας βασίζονται στην ισοπαραμετρική θεώρηση, έχουν τη δυνατότητα να λαμβάνουν υπόψη τις εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις και τέλος μπορούν να έχουν καμπύλη μέση επιφάνεια. Τα εκφυλισμένα στοιχεία κελυφών τοποθετούνται μεταξύ των δυο άλλων τύπων στοιχείων ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων και την ευκολία στη χρήση τους.

3.4 Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κελυφών

Οι δυνατότητες τις οποίες προσφέρουν τα κελύφη για τη διαμόρφωση ενός αισθητικά καλού αποτελέσματος είναι πολύ μεγάλες. Ο σχεδιασμός όμως της μορφής τους δεν μπορεί να γίνεται ανεξάρτητα από τη στατική τους συμπεριφορά. Επιδιώκεται πάντα η μορφή να είναι τέτοια, που να ελαχιστοποιούνται οι ροπές κάμψης και τα φορτία ουσιαστικά να παραλαμβάνονται από δυνάμεις μεμβράνης. Η ελαχιστοποίηση των ροπών έχει δυο σημαντικά πλεονεκτήματα. Πρώτον την ελαχιστοποίηση του πάχους και δεύτερον το ότι μπορεί να εφαρμοσθεί για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς των κελυφών, μια απλή θεωρία. Στην αντίθετη περίπτωση που λόγω του σχήματος αναπτύσσεται σε ένα κέλυφος κατάσταση κάμψης, η εφαρμογή μιας σύνθετης και γενικευμένης θεωρίας για την αναζήτηση της συμπεριφοράς και της ασφάλειας του κελύφους οδηγεί πολλές φορές σε αβεβαιότητες.



Σχήμα 3.8 Κόμβος λεπτότοιχων κελυφωτών αγωγών



Σχήμα 3.9 Διακριτοποίηση Κυλινδρικού Κελύφους

4

Γραμμική Ελαστική Ανάλυση Τριγωνικού Στοιχείου Κελύφους TRIC

4.1 Το τριγωνικό στοιχείο TRIC

Το στοιχείο TRIC (TRIangular Composite) είναι ένα τριγωνικό επίπεδο και πολυστρωματικό στοιχείο κελύφους, το οποίο χρησιμοποιείται για την γραμμική και μη γραμμική ανάλυση λεπτών και σχετικά παχιών, ισότροπων και ανισότροπων κελυφών, πλακών αλλά και άλλων δομικών στοιχείων για τα οποία γίνεται εκτενής αναφορά στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Το στοιχείο αυτό, ανήκει σε μια καινούργια κατηγορία στοιχείων που μορφώνονται βάση της μεθόδου των φυσικών μορφών.

Το TRIC αποτελεί τη βελτίωση μιας σειράς στοιχείων που προτάθηκαν από τον κ. Ι. Αργύρη (1995) και τους συνεργάτες του. Το πρώτο στοιχείο, ήταν το ισότροπο τριγωνικό στοιχείο TRUMP το οποίο αναπτύχθηκε στη δεκαετία του 70. Το στοιχείο αυτό, περιελάμβανε και διατμητική παραμόρφωση, αλλά είχε κάποιους περιορισμούς, όπως ότι όλα τα τρίγωνα έπρεπε να είχαν οξείες γωνίες. Επιπρόσθετα οι όροι ακαμψίας του λόγω διάτμησης προέκυπταν από την μέθοδο 'physical lumping' και την προσομοίωση των πλευρών του τριγώνου με δοκούς. Χρησιμοποιώντας την αρχική θεωρία των φυσικών μορφών, από το στοιχείο TRUMP, προέκυψαν τα επίπεδα και καμπύλα σύνθετα τριγωνικά στοιχεία LACOT και LACOS αντίστοιχα. Τα στοιχεία αυτά, χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές εφαρμογές δίνοντας αξιόπιστες και οικονομικές λύσεις, είχαν όμως και αυτά κάποιους περιορισμούς ως προς τις γωνίες των τριγώνων.

Για τους λόγους αυτούς οι εισηγητές των στοιχείων αυτών αποφάσισαν να αναπροσαρμόσουν τη μέθοδο των φυσικών μορφών, παράγοντας με αυτόν τον τρόπο το στοιχείο TRIC το οποίο δεν έχει κανένα περιορισμό ως προς την μορφή του τριγώνου.

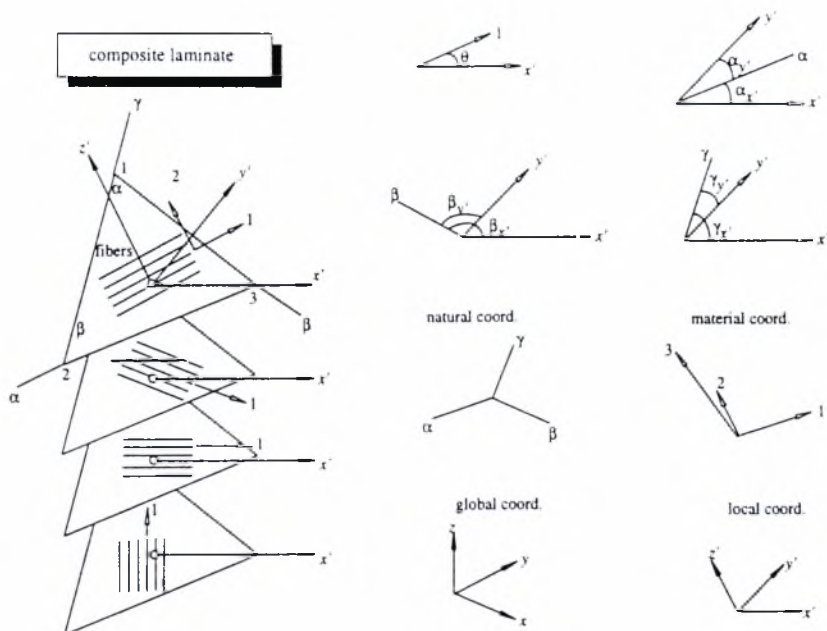
Το στοιχείο TRIC παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα σε σχέση με τις άλλες κατηγορίες στοιχείων κελύφους :

- I. Όλα τα ολοκληρώματα γίνονται αναλυτικά. Σε αντίθεση με τα αντίστοιχα ισο-παραμετρικά στοιχεία κελύφους στα οποία υπολογίζεται για κάθε σημείο Gauss το μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζεται αριθμητικά και κατόπιν γίνεται ολοκλήρωση στο σύνολο των σημείων που διαθέτει κάθε στοιχείο.
- II. Μείωση των διαστάσεων του μητρώου δυσκαμψίας στο φυσικό σύστημα, συνεπώς και λιγότερες πράξεις άρα και μικρότερος υπολογιστικός χρόνος. Εύκολη αναγωγή των μητρώων από το φυσικό σύστημα στο τοπικό και καθολικό καρτεσιανό σύστημα.
- III. Ικανοποιεί τον έλεγχο συρραφής (Patch test), ανήκει δηλαδή στην κατηγορία των στοιχείων που συγκλίνουν στην ακριβή λύση γρήγορα με την βαθμιαία πύκνωση του δικτύου.
- IV. Είναι απαλλαγμένο από το φαινόμενο της παρασιτικής δυσκαμψίας (shear locking). Όσο μικραίνει το πάχος του κελύφους το μητρώο δυσκαμψίας λόγω εγγάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης μεγαλώνει, με αποτέλεσμα η λύση της εξίσωσης ισορροπίας $([k_b] + [k_s])\{d\} = \{r\}$ του στοιχείου κελύφους να δίνει πολύ μικρές επικόμβιες μετατοπίσεις ($\{d\} \rightarrow 0$). Το φαινόμενο αυτό καλείται παρασιτική δυσκαμψία. Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου το μητρώο $[k_s]$ θα πρέπει να τείνει προς ένα ιδιάζον μητρώο, δηλαδή η οριζουσα να τείνει προς το μηδέν, με την μείωση του πάχους του κελύφους.
- V. Επειδή πρόκειται για πολυστρωματικό υλικό υπάρχει η δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού των τάσεων σε κάθε στρώση του στοιχείου. Έτσι μπορεί εύκολα και με μεγάλη ακρίβεια να βρεθεί αν μια στρώση έχει διαρρεύσει ή όχι σε κάθε στοιχείο κάτι που είναι πολύ χρήσιμο για τη μη γραμμική ανάλυση των φορέων.

4.2 Κινηματικές σχέσεις στο φυσικό σύστημα

Ορίζουμε το Ευκλείδειο τρίγωνο (Σχήμα 4.0) ως $\Delta 123$. Τα νούμερα 1,2 και 3 αντιστοιχούν στις κορυφές του τριγώνου και με α, β, γ συμβολίζονται οι αντίστοιχες πλευρές. Η φορά της αρίθμησης θα είναι πάντα αντιωρολογιακή. Οι τρεις γωνίες ορίζονται ως εξής :

$$\hat{\alpha}=3\hat{1}2, \hat{\beta}=1\hat{2}3, \hat{\gamma}=2\hat{3}1$$



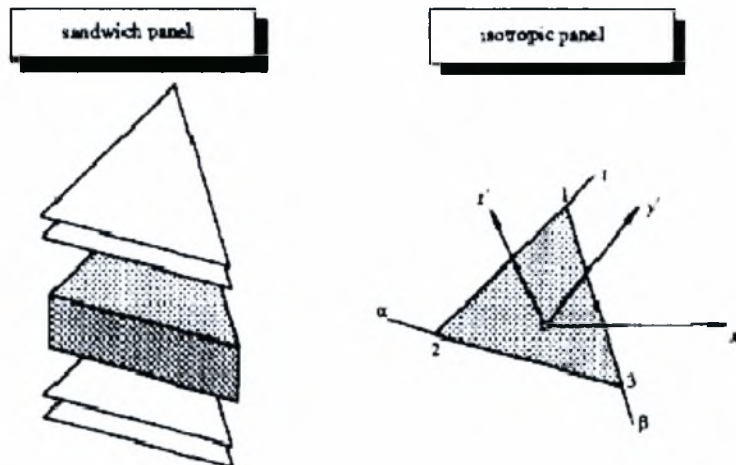
Σχήμα 4.0 : Συστήματα αναφοράς TRIC

Στο στοιχείο του σχήματος 4.0 υπάρχουν 4 συστήματα αναφοράς :

- I. **Το φυσικό σύστημα** “αβγ”, οι άξονες του οποίου ταυτίζονται με τις πλευρές του τριγώνου
- II. **Το τοπικό καρτεσιανό σύστημα** συντεταγμένων $x'y'z'$, η αρχή του οποίου βρίσκεται στο κέντρο βάρους του τριγώνου. Οι άξονες x' και y' κείτονται επί του επιπέδου του στοιχείου, ενώ ο άξονας z' είναι κάθετος σε αυτό.
- III. **Το καθολικό καρτεσιανό σύστημα** συντεταγμένων xyz στο οποίο διατυπώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας και

IV. Το σύστημα συντεταγμένων του υλικού 123, για κάθε στρώση του τριγώνου, με τον άξονα 1 παράλληλο στη διεύθυνση των ινών, τον άξονα 2 κάθετο στον άξονα 1 και τον άξονα 3 κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου.

Η χρήση όλων αυτών των διαφορετικών συστημάτων κάνουν το TRIC κατάλληλο για την προσομοίωση κατασκευών από πολυστρωματικά ανισότροπα υλικά (multilayer anisotropic or sandwich) (Σχήμα 4.1). Η ταύτιση του συστήματος του υλικού με το τοπικό καρτεσιανό σύστημα, οδηγεί στην προσομοίωση κατασκευών από ομογενές ισότροπο υλικό.



Σχήμα 4.1: Πολυστρωματικό ανισότροπο (sandwich panel) και ισότροπο (isotropic panel) τριγωνικό στοιχείο TRIC.

4.3 Τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις στο φυσικό σύστημα.

Ορίζουμε τον τανυστή των παραμορφώσεων ως :

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_j^i + u_i^j), \quad i, j = x' y' z' \quad (4.1)$$

όπου $u^i = \{u_{x'} \ u_{y'} \ u_{z'}\}^T$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων. Τα διανύσματα των ανηγμένων παραμορφώσεων γ' και σ' στο τοπικό σύστημα είναι:

$$\gamma' = \left\{ \gamma_{xx'} \gamma_{yy'} \gamma_{zz'} \sqrt{2}\gamma_{xy'} \sqrt{2}\gamma_{xz'} \sqrt{2}\gamma_{yz'} \right\}^t \quad (4.2)$$

$$\sigma' = \left\{ \sigma_{xx'} \sigma_{yy'} \sigma_{zz'} \sqrt{2}\sigma_{xy'} \sqrt{2}\sigma_{xz'} \sqrt{2}\sigma_{yz'} \right\}^t \quad (4.3)$$

Το $\sqrt{2}$ που υπάρχει στους παραπάνω τύπους δεν προκύπτει όπως είναι γνωστό από τις κινηματικές σχέσεις της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Σώματος αλλά μετά από μια παραδοχή που πραγματοποιεί ο Ι.Αργύρης. Όπως θα διαπιστωθεί, αυτή η παραδοχή, δεν μεταβάλλει καθόλου την ενέργεια παραμόρφωσης αφού ουσιαστικά πρόκειται για διαφορετικό τρόπο συμβολισμού. Με βάση αυτούς τους ορισμούς η ενέργεια παραμόρφωσης υποθέτοντας ότι $\sigma_{zz}=0$ δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \gamma'^t \sigma' \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \gamma_{xx'} \gamma_{yy'} \gamma_{zz'} \sqrt{2}\gamma_{xy'} \sqrt{2}\gamma_{xz'} \sqrt{2}\gamma_{yz'} \right\} \left\{ \sigma_{xx'} \sigma_{yy'} \sigma_{zz'} \sqrt{2}\sigma_{xy'} \sqrt{2}\sigma_{xz'} \sqrt{2}\sigma_{yz'} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{xx'}\gamma_{xx'} + \sigma_{yy'}\gamma_{yy'} + \sqrt{2}\sigma_{xy'}\sqrt{2}\gamma_{xy'} + \sqrt{2}\sigma_{xz'}\sqrt{2}\gamma_{xz'} + \sqrt{2}\sigma_{yz'}\sqrt{2}\gamma_{yz'} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1) οι όροι γράφονται :

$$\sqrt{2}\sigma_{ij'}\sqrt{2}\gamma_{ij'} = \sqrt{2}\sqrt{2}\sigma_{ij'} \frac{1}{2} (u_j^i + u_i^j) = \sigma_{ij'} \gamma_{ij'}^e, \quad i,j=x'y'z'$$

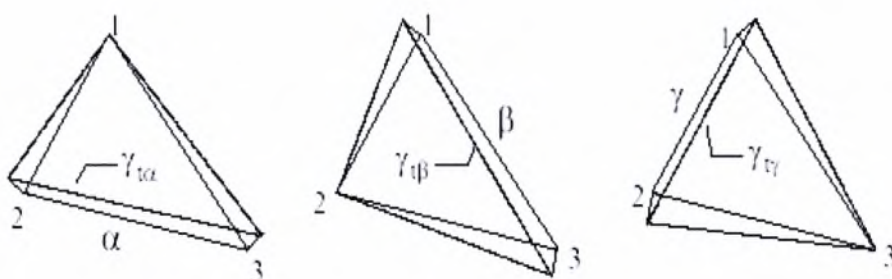
Με αυτόν τον τρόπο η εξίσωση (4.4) γράφεται ως εξής :

$$U = \frac{1}{2} \left(\sigma_{xx'}\gamma_{xx'} + \sigma_{yy'}\gamma_{yy'} + \sigma_{xy'}\gamma_{xy'}^e + \sigma_{xz'}\gamma_{xz'}^e + \sigma_{yz'}\gamma_{yz'}^e \right) \quad (4.5)$$

Σύμφωνα με την μέθοδο των φυσικών μορφών, το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων του επίπεδου στοιχείου $\gamma' = \left\{ \gamma_{xx'} \gamma_{yy'} \gamma_{zz'} \sqrt{2}\gamma_{xy'} \sqrt{2}\gamma_{xz'} \sqrt{2}\gamma_{yz'} \right\}^t$, μπορούν να αντικατασταθούν από τις γ_i : ανηγμένες αξονικές φυσικές παραμορφώσεις (axial straining modes) οι οποίες συμβολίζονται με το διάνυσμα :

$$\gamma_t = \begin{Bmatrix} \gamma_{ta} \\ \gamma_{tb} \\ \gamma_{tc} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Οι παραμορφώσεις αυτές είναι ισοδύναμες με τις καρτεσιανές και μετριοούνται κατά τις διευθύνσεις των τριών πλευρών του τριγώνου. Εξ' ορισμού η αξονική παραμόρφωση μιας πλευράς του τριγώνου, αφήνει τις άλλες πλευρές του τριγώνου απαραμόρφωτες (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2: Αξονικές παραμορφώσεις

Στο σχήμα 4.3 φαίνεται ένα τετραγωνικό στοιχείο υπό συνθήκες επίπεδης έντασης. Κατά την διάρκεια μιας ελαστικής παραμόρφωσής του, η επίπεδη εντατική κατάσταση του στοιχείου, μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις τρεις καρτεσιανές ανηγμένες παραμορφώσεις, τις $\gamma_{xx'}$, $\gamma_{yy'}$ και $\gamma_{xy'}$. Αν αγνοήσουμε τις κινήσεις στερεού σώματος που συμβαίνουν κατά την διάρκεια της ελαστικής παραμόρφωσης, το τετραγωνικό στοιχείο παραμορφώνεται σε ένα παραλληλόγραμμο, του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος $Ds(1+\gamma_{xx'})$ και $Ds(1+\gamma_{yy'})$ αντίστοιχα. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να παραχθεί μία σχέση για την ανηγμένη αξονική παραμόρφωση $\gamma_t(\alpha)$ κατά μία τυχαία διεύθυνση η οποία σχηματίζει γωνία α με τον άξονα x . Για αυτόν τον λόγο θεωρούμε το τρίγωνο (ABC) του σχήματος 4.3, το οποίο παραμορφούμενο σχηματίζει το αμβλυγώνιο τρίγωνο (A'B'C'). Εφαρμόζοντας το νόμο των συνημίτονων στο τρίγωνο (A'B'C') έχουμε :

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (B'C')^2 - 2(A'C')(B'C')\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\gamma_{xy}\right) \quad (4.7)$$

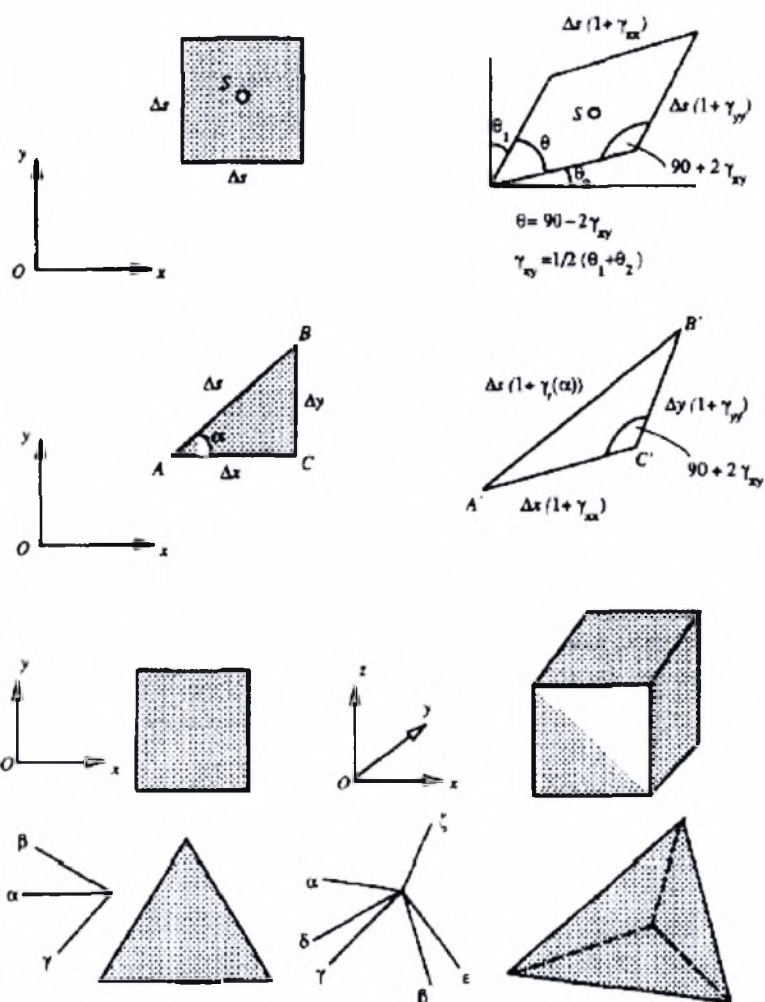
Χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις :

$$(A'C') = \Delta x(1 + \gamma_{xx'}),$$

$$(B'C') = \Delta y(1 + \gamma_{yy'}),$$

$$(A'B') = \Delta s(1 + \gamma_t(\alpha)),$$

η σχέση (4.7) γράφεται :



Σχήμα 4.3 : Παραμορφώσεις τετραγωνικού και τριγωνικού στοιχείου δισδιάστατης και τρισδιάστατης ελαστικότητας

$$\begin{aligned}\Delta s^2(1+\gamma_t(\alpha))^2 &= \Delta x^2(1+\gamma_{xx'})^2 + \Delta y^2(1+\gamma_{yy'})^2 \\ &\quad - 2\Delta x\Delta y(1+\gamma_{xx'})(1+\gamma_{yy'})\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\gamma_{xy'}\right)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ισότητες $\Delta x = \Delta s \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta s \sin \alpha$, η σχέση (4.8) γράφεται:

$$\begin{aligned}\Delta s^2(1+\gamma_t(\alpha))^2 &= \Delta s^2 \cos^2 \alpha (1+\gamma_{xx'})^2 + \Delta s^2 \sin^2 \alpha (1+\gamma_{yy'})^2 \\ &\quad - 2\Delta s^2 (1+\gamma_{xx'})(1+\gamma_{yy'})\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\gamma_{xy'}\right)\end{aligned}\quad (4.9)$$

Ακολουθώντας τις παραδοχές της γραμμικής ελαστικότητας θεωρούμε ότι η γωνία $\gamma_{xy'}$ είναι πολύ μικρή :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\gamma_{xy'}\right) = -\sin 2\gamma_{xy'} \cong -2\gamma_{xy'} \quad (4.10)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (4.9) και (4.10) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}(1+\gamma_t(\alpha))^2 &= \cos^2 \alpha (1+\gamma_{xx'})^2 + \sin^2 \alpha (1+\gamma_{yy'})^2 \\ &\quad + 4\sin \alpha \cos \alpha (1+\gamma_{xx'})(1+\gamma_{yy'})\gamma_{xy'}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Αναπτύσσοντας την σχέση (4.11) έχουμε :

$$\begin{aligned}(1+\gamma_t(\alpha))^2 &= \cos^2 \alpha (1+2\gamma_{xx'}+\gamma_{xx'}^2) + \sin^2 \alpha (1+2\gamma_{yy'}+\gamma_{yy'}^2) \\ &\quad + 4\sin \alpha \cos \alpha (1+\gamma_{xx'}+\gamma_{yy'}+\gamma_{xx'}\gamma_{yy'})\gamma_{xy'}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Αγνοώντας όρους δεύτερης και τρίτης τάξης $\gamma_t(\alpha)^2 = \gamma_{xx'}^2 = \gamma_{yy'}^2 = \gamma_{xx'}\gamma_{yy'} = \gamma_{xx'}\gamma_{xy'} = \gamma_{yy'}\gamma_{xy'} = 0$, η σχέση (4.12) παίρνει την μορφή :

$$1+2\gamma_t(\alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\gamma_{xx'}\cos^2 \alpha + 2\gamma_{yy'}\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha \gamma_{xy'} \quad (4.13)$$

Γνωρίζοντας ότι $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ η σχέση (4.13) γράφεται :

$$2\gamma_t(\alpha) = 2\gamma_{xx'}\cos^2 \alpha + 2\gamma_{yy'}\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha \gamma_{xy'} \quad (4.14)$$

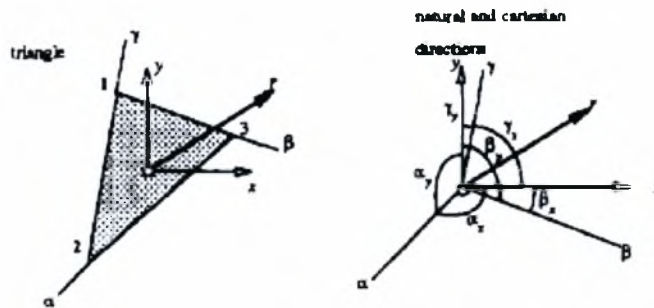
$$\gamma_t(\alpha) = \gamma_{xx'}\cos^2 \alpha + \gamma_{yy'}\sin^2 \alpha + \sqrt{2}\sin \alpha \cos \alpha (\sqrt{2}\gamma_{xy'}) \quad (4.15)$$

Η σχέση (4.15) εκφράζει την ανηγμένη παραμόρφωση γ_t στο φυσικό σύστημα σε κάθε διεύθυνση α σαν συνάρτηση των τοπικών καρτεσιανών ανηγμένων παραμορφώσεων

$\gamma_{xx'}$, $\gamma_{yy'}$ και $\gamma_{xy'}$ και της γωνίας α που σχηματίζει η διεύθυνση αυτή με τον τοπικό άξονα x' . Τελικά οι ανηγμένες αξονικές παραμορφώσεις γ_t και γ' στο φυσικό και τοπικό σύστημα αντίστοιχα συνδέονται μέσω του μητρώου B ως ακολούθως :

$$\gamma_t = B' \gamma' \Rightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_{ta} \\ \gamma_{tb} \\ \gamma_{ty} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha x'}^2 & s_{\alpha x'}^2 & \sqrt{2}c_{\alpha x'}s_{\alpha x'} \\ c_{\beta x'}^2 & s_{\beta x'}^2 & \sqrt{2}c_{\beta x'}s_{\beta x'} \\ c_{\gamma x'}^2 & s_{\gamma x'}^2 & \sqrt{2}c_{\gamma x'}s_{\gamma x'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{x'x'} \\ \gamma_{y'y'} \\ \sqrt{2}\gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

όπου $c_{\alpha x'} = \cos \alpha_{x'}$, $s_{\alpha x'} = \sin \alpha_{x'}$ δηλαδή οι γωνίες που σχηματίζουν οι κορυφές του τριγώνου σε σχέση με τον τοπικό άξονα x' .



Σχήμα 4.4 : Οι γωνίες α_x , β_x , γ_x , α_y , β_y , γ_y

Όσο καμία από τις γωνίες $\alpha_{x'}$, $\beta_{x'}$, $\gamma_{x'}$, κτλ. δεν είναι ίση με το μηδέν, η εξίσωση (4.16) μπορεί να γραφτεί :

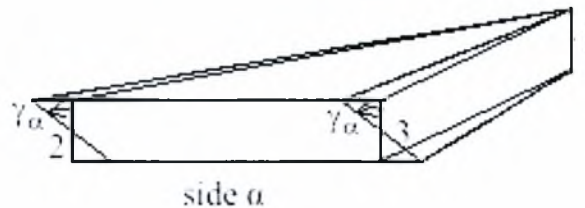
$$\gamma_t = B' \gamma' \Rightarrow \gamma' = B^{-t} \gamma_t \quad (4.17)$$

Ομοίως οι συνολικές φυσικές εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις (total transverse shear strain) ορίζονται για κάθε πλευρά του τριγώνου ως :

$$\gamma_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{sa} \\ \gamma_{sb} \\ \gamma_{sy} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Στο σχήμα 4.6 φαίνεται η φυσική διατμητική ανηγμένη παραμόρφωση για την πλευρά α του τριγώνου. Όπως φαίνεται, η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση μιας πλευ-

ράς του τριγώνου αφήνει τις άλλες δύο γωνίες των πλευρών του κατά το πάχος του στοιχείου ορθές. Όμως λόγω αυτής της εγκάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης αναπτύσσονται συνιστώσες τάσεις σε όλες τις πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 4.5 : Εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση πλευράς α, γ_{sa}

Η σχέση που συνδέει τις εγκάρσιες φυσικές διατμητικές παραμορφώσεις με τις εγκάρσιες καρτεσιανές, λόγω γεωμετρικών σχέσεων είναι :

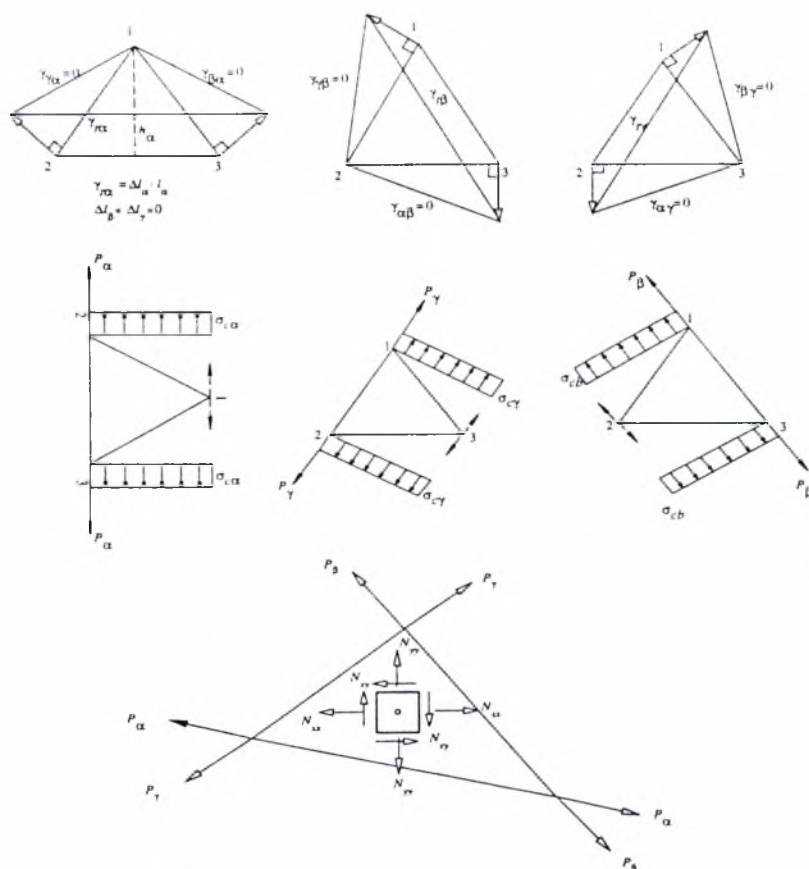
$$\gamma_s = T_s \gamma'_s \Rightarrow \begin{Bmatrix} \gamma_{sa} \\ \gamma_{sb} \\ \gamma_{sy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{ax'} & s_{ax'} \\ c_{\beta x'} & s_{\beta x'} \\ c_{\gamma x'} & s_{\gamma x'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz'} \\ \gamma_{yz'} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Στο διάνυσμα των φυσικών αξονικών ανηγμένων παραμορφώσεων αντιστοιχεί το διάνυσμα των αξονικών φυσικών τάσεων (Σχήμα 4.6) σ_c :

$$\sigma_c = \begin{Bmatrix} \sigma_{ca} \\ \sigma_{cb} \\ \sigma_{cy} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Στο διάνυσμα των αξονικών φυσικών τάσεων αντιστοιχεί το διάνυσμα τάσεων σ' του τοπικού καρτεσιανού συστήματος:

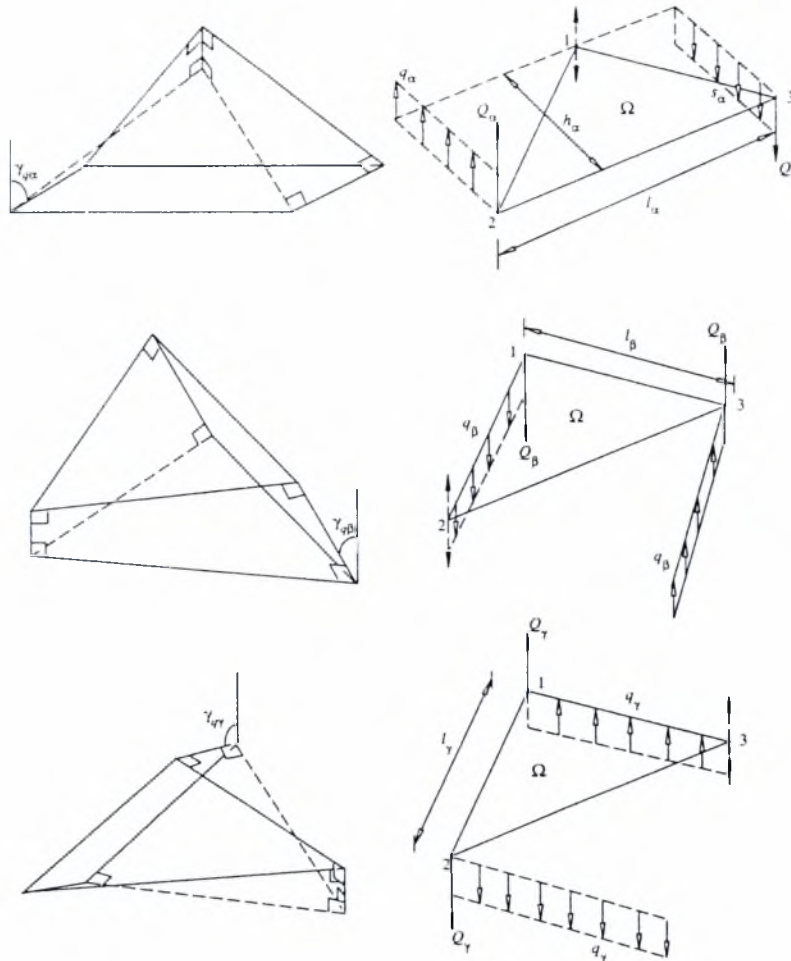
$$\sigma' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sqrt{2}\sigma_{x'y'} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$



Σχήμα 4.6 : Συνολική αξονική παραμόρφωση και οι αντίστοιχες ορθές τάσεις και αξονικές δυνάμεις

Στο διάνυσμα των φυσικών εγκάρσιων διατμητικών ανηγμένων παραμορφώσεων γ_s αντιστοιχεί το διάνυσμα των εγκάρσιων φυσικών διατμητικών τάσεων σ_s (Σχήμα 4.7) (natural transverse shear stresses - σ_s) :

$$\sigma_s = \begin{Bmatrix} \sigma_{s\alpha} \\ \sigma_{s\beta} \\ \sigma_{s\gamma} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$



Σχήμα 4.7 : Εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση για τις τρεις πλευρές του τριγώνου και οι αντίστοιχες διατμητικές τάσεις και τέμνουσες δυνάμεις.

Από την ισότητα της ενέργειας παραμορφώσεως στο φυσικό και στο καρτεσιανό σύστημα προκύπτει η σχέση μεταξύ φυσικών και καρτεσιανών τάσεων.

$$U = \frac{1}{2} \gamma_i' \sigma_c = \frac{1}{2} \gamma'' \sigma' \quad (4.23)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.15) προκύπτει $\gamma' = B^{-1} \gamma_i$, $(B^{-1} = ((B)^{-1})^T)$ και

$$U = \frac{1}{2} \gamma_i' \sigma_c = \frac{1}{2} (B^{-1} \gamma_i)' \sigma' = \frac{1}{2} B^{-1} \gamma_i' \sigma' \quad (4.24)$$

Από τη σχέση (4.23) και (4.24) παίρνουμε :

$$\sigma_c = B^{-1} \sigma' \Leftrightarrow \sigma' = B \sigma_c \quad (4.25)$$

Οι εγκάρσιες φυσικές διατμητικές τάσεις συνδέονται με τις καρτεσιανές εγκάρσιες τάσεις μέσω της σχέσης :

$$\sigma_s = T_s \sigma_s' \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{sa} \\ \sigma_{s\beta} \\ \sigma_{s\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ax'} & s_{ax'} \\ c_{\beta x'} & s_{\beta x'} \\ c_{\gamma x'} & s_{\gamma x'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Οι σχέσεις (4.19) και (4.26), οι οποίες παράχθηκαν από απλές γεωμετρικές σχέσεις, μπορούν να ομαδοποιηθούν στην παρακάτω σχέση :

$$\begin{bmatrix} \gamma_s \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s & \cdot \\ \cdot & T_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_s' \\ \sigma_s' \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Ανακαλώντας τις σχέσεις (4.17), (4.19), (4.25) & (4.26) μπορεί να γραφτεί η σχέση :

$$\begin{bmatrix} \gamma_c \\ \sigma_c \\ \gamma_s \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^t & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & B^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & T_s & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & T_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma' \\ \sigma' \\ \gamma_s' \\ \sigma_s' \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

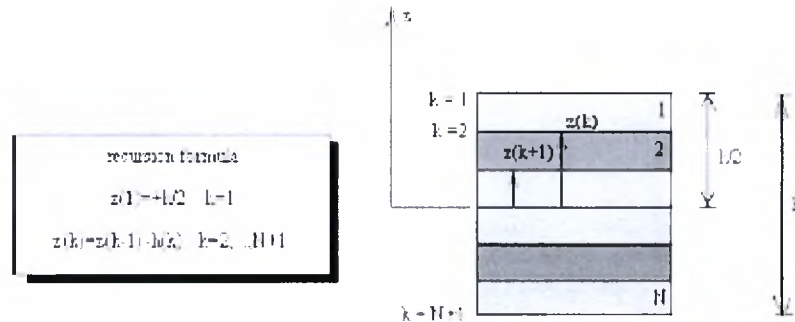
4.4 Καταστατικές σχέσεις

Η σχέση που συνδέει τις τάσεις με τις ανηγμένες παραμορφώσεις στο φυσικό σύστημα, για κάθε στρώση (k) του στοιχείου έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ca} \\ \sigma_{c\beta} \\ \sigma_{c\gamma} \\ \sigma_{sa} \\ \sigma_{s\beta} \\ \sigma_{s\gamma} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa_{aa} & \kappa_{a\beta} & \kappa_{a\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_{\beta a} & \kappa_{\beta\beta} & \kappa_{\beta\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_{\gamma a} & \kappa_{\gamma\beta} & \kappa_{\gamma\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{aa} & \chi_{a\beta} & \chi_{a\gamma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{\beta a} & \chi_{\beta\beta} & \chi_{\beta\gamma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{\gamma a} & \chi_{\gamma\beta} & \chi_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{ta} \\ \gamma_{t\beta} \\ \gamma_{t\gamma} \\ \gamma_{sa} \\ \gamma_{s\beta} \\ \gamma_{s\gamma} \end{Bmatrix}_k \quad (4.29)$$

$$\dot{\gamma} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_c \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa_{ct} & \cdot \\ \cdot & \chi_{s,tk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k \quad (4.30)$$

για $k= 1, \dots, N$ είναι ο αριθμός των στρώσεων όπως αυτές φαίνονται στο σχήμα 4.8. Όπως φαίνεται από τις πιο πάνω σχέσεις δεν υπάρχουν όροι σύζευξης μεταξύ αξονικών τάσεων και των εγκάρσιων διατμητικών φυσικών παραμορφώσεων.



Σχήμα 4.8 : Συνταγμένη z στη διατομή

Στο σύστημα του υλικού οι καταστατικές σχέσεις για κάθε στρώση (k) ενός ανισότροπου υλικού γράφονται :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \nu_{12}\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \cdot \\ \nu_{12}\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2G_{12} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \sqrt{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (4.31)$$

$$\begin{Bmatrix} \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 2G_{13} & \cdot \\ \cdot & 2G_{23} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \sqrt{2}\gamma_{13} \\ \sqrt{2}\gamma_{23} \end{Bmatrix}_k \quad (4.32)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε ενιαία μορφή ως εξής :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \kappa_{12} & \cdot \\ \cdot & G_s \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k \quad (4.33)$$

Στην γενικότερη περίπτωση οι ιδιότητες των υλικών εξαρτώνται από την θερμοκρασία. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.34)

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (4.34)$$

$$\nu_{12} \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \nu_{21} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

και από τις σχέσεις (4.31) και (4.32) το κ_{12} εναλλακτικά γράφεται :

$$\kappa_{12} = \frac{1}{1-\nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_2 & . \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & . \\ . & . & 2G_{12}(1-\nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Για ισότροπο και ομογενές υλικό ($\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$, $E_1 = E_2 = E$) η σχέση (4.35) γράφεται:

$$\kappa_{12} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu E & . \\ \nu E & E & . \\ . & . & 2G(1-\nu^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & . \\ \nu E & E & . \\ . & . & 2G \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

όπου $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ είναι το μέτρο διάτμησης, E είναι το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος του Poisson. Για τον υπολογισμό του καταστατικού μητρώου στο φυσικό σύστημα ακολουθείται ο παρακάτω μετασχηματισμός :

σύστημα υλικού \mapsto τοπικό σύστημα \mapsto φυσικό σύστημα

material coordinate \mapsto local coordinate \mapsto global coordinate

$$E: \frac{1}{2} \gamma_{12}^t \sigma_{12} = \frac{1}{2} \gamma'' \sigma' = \frac{1}{2} \gamma_t^t \sigma_c$$

Οι παρακάτω σχέσεις συνδέουν τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις αντίστοιχες τάσεις στο σύστημα του υλικού και στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & \cdot \\ \cdot & A_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_t \\ \gamma'_s \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{12} & \cdot \\ \cdot & G_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{12} & \cdot \\ \cdot & G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p & \cdot \\ \cdot & A_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_t \\ \gamma'_s \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Άρα τελικά η σχέση (4.38) γράφεται ως εξής :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{12} A_p & \cdot \\ \cdot & G_s A_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_t \\ \gamma'_s \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

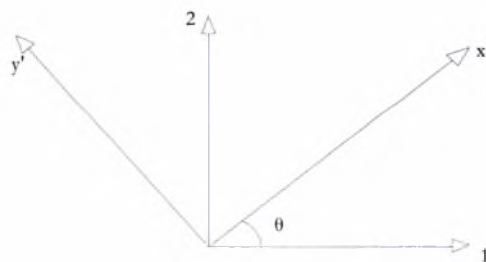
Τα μητρώα A_p, A_s υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τους παρακάτω συμβολισμούς :

$$\begin{aligned} u^1, u^2 &\in 123 \quad (\text{σύστημα υλικού}) \\ u', v' &\in x', y', z' \quad (\text{τοπικό καρτεσιανό σύστημα}) \end{aligned}$$

Στις δύο διαστάσεις ισχύει ο γνωστός μετασχηματισμός :

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

όπου θ η γωνία μεταξύ της x' και 1 διεύθυνσης.



Σχήμα 4.9 : Γωνία θ μεταξύ τοπικού συστήματος και συστήματος υλικού

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις :

$$\begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'} & \frac{\partial x^2}{\partial x'} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y'} & \frac{\partial x^2}{\partial y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγίσης αλυσίδας έχουμε :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'} & \frac{\partial x^2}{\partial x'} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y'} & \frac{\partial x^2}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Οι εκφράσεις των συνιστωσών των ανηγμένων παραμορφώσεων στο τοπικό σύστημα συναρτήσει ανηγμένων παραμορφώσεων στο σύστημα του υλικού γράφονται:

$$\begin{aligned} \gamma_{x'x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} (c_\theta u^1 + s_\theta u^2) = \left(c_\theta \frac{\partial}{\partial x^1} + s_\theta \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (c_\theta u^1 + s_\theta u^2) \\ &= c_\theta^2 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + s_\theta^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \underbrace{c_\theta s_\theta \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right)}_{2\gamma_{12}} \\ &= c_\theta^2 \gamma_{11} + s_\theta^2 \gamma_{22} + \sqrt{2} c_\theta s_\theta (\sqrt{2} \gamma_{12}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yy'} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} (c_\theta u^2 - s_\theta u^1) = \left(c_\theta \frac{\partial}{\partial x^2} - s_\theta \frac{\partial}{\partial x^1} \right) (c_\theta u^2 - s_\theta u^1) \\
&= c_\theta^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + s_\theta^2 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} - c_\theta s_\theta \underbrace{\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right)}_{2\gamma_{12}} = \\
&= c_\theta^2 \gamma_{22} + s_\theta^2 \gamma_{11} - \sqrt{2} c_\theta s_\theta (\sqrt{2} \gamma_{12})
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \gamma_{xy'} &= \sqrt{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) = \sqrt{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y'} (c_\theta u^1 + s_\theta u^2) + \frac{\partial}{\partial x'} (c_\theta u^2 - s_\theta u^1) \right) = \\
&= \sqrt{2} \frac{1}{2} \left[\left(c_\theta \frac{\partial}{\partial x^2} - s_\theta \frac{\partial}{\partial x^1} \right) (c_\theta u^1 + s_\theta u^2) + \left(c_\theta \frac{\partial}{\partial x^1} + s_\theta \frac{\partial}{\partial x^2} \right) (c_\theta u^2 - s_\theta u^1) \right] \\
&= \sqrt{2} \frac{1}{2} \left[c_\theta^2 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + c_\theta^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - s_\theta^2 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - s_\theta^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + 2c_\theta s_\theta \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \right) \right] \\
&= \sqrt{2} \frac{1}{2} \left[c_\theta^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right) - s_\theta^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right) + 2c_\theta s_\theta \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \right) \right] \\
&= \sqrt{2} \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} c_\theta^2 (\sqrt{2} \gamma_{12}) - \sqrt{2} s_\theta^2 (\sqrt{2} \gamma_{12}) + 2c_\theta s_\theta (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \right] \\
&= \sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{2} (c_\theta^2 - s_\theta^2) (\sqrt{2} \gamma_{12}) + \sqrt{2} \frac{1}{2} 2c_\theta s_\theta (\gamma_{22} - \gamma_{11}) \\
&= (c_\theta^2 - s_\theta^2) (\sqrt{2} \gamma_{12}) + \sqrt{2} c_\theta s_\theta (\gamma_{22} - \gamma_{11})
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Από τις σχέσεις (4.45) , (4.46) , (4.47) και (4.37) τελικά τα μητρώα A_p, A_s είναι τα εξής :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xx'} \\ \gamma_{yy'} \\ \sqrt{2} \gamma_{xy'} \end{Bmatrix}_k = A_p^{-1} \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \sqrt{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} c_\theta^2 & s_\theta^2 & \sqrt{2} c_\theta s_\theta \\ s_\theta^2 & c_\theta^2 & -\sqrt{2} c_\theta s_\theta \\ -\sqrt{2} c_\theta s_\theta & \sqrt{2} c_\theta s_\theta & (c_\theta^2 - s_\theta^2) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{xx'} \\ \gamma_{yy'} \\ \sqrt{2} \gamma_{xy'} \end{Bmatrix}_k \tag{4.48}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz'} \\ \gamma_{yz'} \end{Bmatrix}_k = A_s^{-1} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}_k \tag{4.49}$$

Εάν έχω ισότροπο υλικό η γωνία $\theta=0^\circ$ συνεπώς οι πίνακες A_p και A_s είναι μοναδιαίοι πίνακες I.

Χρησιμοποιώντας την σχέση που μας δίνει την ενέργεια παραμορφώσεως έχουμε :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \gamma_{12}^t \sigma_{12} \stackrel{(4.32),(4.37)}{=} \frac{1}{2} \gamma'^t [A_P^t \kappa_{12} A_P] \gamma' = \frac{1}{2} \gamma'^t \kappa' \gamma' \\
 U &= \frac{1}{2} \gamma_c^t \sigma_c \stackrel{(4.28),(4.30)}{=} \frac{1}{2} [B^t \gamma']^t \kappa_{ct} [B^t \gamma'] \\
 &= \frac{1}{2} \gamma'^t [B \kappa_{ct} B^t] \gamma'
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Από την σχέση (4.50) προκύπτει για κάθε στρώση (k) του υλικού :

$$\begin{aligned}
 \kappa' &= [A_P^t \kappa_{12} A_P]_k = [B \kappa_{ct} B^t]_k \\
 \kappa_{ct}^k &= [B^{-t} [A_P^t \kappa_{12} A_P] B^{-t}]_k
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την ενέργεια παραμορφώσεως λόγω των εγκάρσιων διατμητικών παραμορφώσεων έχουμε:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \gamma_s^t \sigma_s = \frac{1}{2} \gamma_s'^t \sigma_s' = \frac{1}{2} \gamma_s'^t [A_s^t G_s A_s] \gamma_s' \\
 &= \frac{1}{2} \gamma_s'^t [G_s'] \gamma_s'
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

όπου για κάθε στρώση (k) ισχύει :

$$G_s' = [A_s^t G_s A_s]_k, G_s' = \begin{bmatrix} 2G_{x'x'} & 2G_{x'y'} \\ 2G_{x'y'} & 2G_{y'y'} \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της διατμητικής δυσκαμψίας στο φυσικό σύστημα. Λύνοντας την σχέση (4.19) μπορούμε να εκφράσουμε τις φυσικές εγκάρσιες παραμορφώσεις συναρτήσει των τοπικών εγκάρσιων διατμητικών παραμορφώσεων. Παρατηρούμε από την σχέση αυτή ότι διαθέτουμε τρεις εξισώσεις με μόνο δύο αγνώστους. Για τον λόγο αυτό λύνουμε τις εξισώσεις ανά ζεύγη και παίρνουμε το μέσο όρο των λύσεων. Οι πιο κάτω σχέσεις ισχύουν για τις τρεις φυσικές εγκάρσιες παραμορφώσεις :

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu} &= c_{\mu x'} \gamma_{x'z'} + c_{\mu y'} \gamma_{y'z'} \\ \mu, \nu &= \alpha, \beta, \gamma \\ \gamma_{\nu} &= c_{\nu x'} \gamma_{x'z'} + c_{\nu y'} \gamma_{y'z'}\end{aligned}\quad (4.54)$$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα ως προς $\gamma_{x'z'}, \gamma_{y'z'}$ έχουμε :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1_{\mu} 1_{\nu}}{2\Omega} \begin{bmatrix} c_{\nu y'} & -c_{\mu y'} \\ -c_{\nu x'} & c_{\mu x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\mu} \\ \gamma_{\nu} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

όπου Ω από το Παράρτημα Α είναι το εμβαδόν του τριγωνικού στοιχείου.

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές σχέσεις :

$$\begin{aligned}x_{\alpha} &= l_{\alpha} c_{\alpha x'} = x_3 - x_2, & y_{\alpha} &= l_{\alpha} c_{\alpha y'} = y_3 - y_2 \\ x_{\beta} &= l_{\beta} c_{\beta x'} = x_1 - x_3, & y_{\beta} &= l_{\beta} c_{\beta y'} = y_1 - y_3 \\ x_{\gamma} &= l_{\gamma} c_{\gamma x'} = x_2 - x_1, & y_{\gamma} &= l_{\gamma} c_{\gamma y'} = y_2 - y_1\end{aligned}\quad (4.56)$$

η σχέση (4.55) γράφεται ως εξής :

$$\begin{aligned}\gamma'_s &= \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} l_{\alpha} y_{\beta} & -l_{\beta} y_{\alpha} \\ -l_{\alpha} x_{\beta} & l_{\beta} x_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\alpha} \\ \gamma_{\beta} \end{Bmatrix} = W_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \\ \gamma'_s &= \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} l_{\beta} y_{\gamma} & -l_{\gamma} y_{\beta} \\ -l_{\beta} x_{\gamma} & l_{\gamma} x_{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\beta} \\ \gamma_{\gamma} \end{Bmatrix} = W_{\beta\gamma} \gamma_{\beta\gamma} \\ \gamma'_s &= \begin{Bmatrix} \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} l_{\gamma} y_{\alpha} & -l_{\alpha} y_{\gamma} \\ -l_{\gamma} x_{\alpha} & l_{\alpha} x_{\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\alpha} \\ \gamma_{\beta} \end{Bmatrix} = W_{\gamma\alpha} \gamma_{\gamma\alpha}\end{aligned}\quad (4.57)$$

Από την αρχή των δυνατών έργων έχουμε :

$$\delta U_s = \int_V \sigma'_s {}^t \delta \gamma_s {}^t dV = \int_V \gamma_s {}^t G'_s \delta \gamma_s {}^t dV \quad (4.58)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (4.57) η σχέση (4.58) γράφεται :

$$\delta U_s = \int_V \gamma_{\alpha\beta} {}^t \left[W_{\alpha\beta} {}^t G_s {}^t W_{\alpha\beta} \right] \delta \gamma_{\alpha\beta} {}^t dV = \gamma_{\alpha\beta} {}^t \left[\int_V \left[W_{\alpha\beta} {}^t G_s {}^t W_{\alpha\beta} \right] dV \right] \gamma_{\alpha\beta} \quad (4.59)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τις άλλες δύο διατμητικές παραμορφώσεις προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για την διατμητική εγκάρσια ακαμψία :

$$\begin{aligned} x_1 &= W_{\alpha\beta}^t G_s W_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} x_1^{11} & x_1^{12} \\ x_1^{21} & x_1^{22} \end{bmatrix} \\ \bar{x}_2 &= W_{\beta\gamma}^t G_s W_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} x_2^{11} & x_2^{12} \\ x_2^{21} & x_2^{22} \end{bmatrix} \\ x_3 &= W_{\gamma\alpha}^t G_s W_{\gamma\alpha} = \begin{bmatrix} x_3^{11} & x_3^{12} \\ x_3^{21} & x_3^{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Για να δημιουργηθεί το εγκάρσιο διατμητικό μητρώο στο φυσικό σύστημα χωρίς να επηρεασθεί η συμμετρία του συστήματος ,είναι δικαιολογημένη η εύρεση του μέσου όρου των x_1, x_2, x_3 ως εξής :

$$X_s = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} x_1^{11} + x_3^{22} & x_1^{12} & x_3^{12} \\ x_1^{12} & x_2^{11} + x_1^{22} & x_2^{12} \\ x_3^{12} & x_2^{12} & x_3^{11} + x_2^{22} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

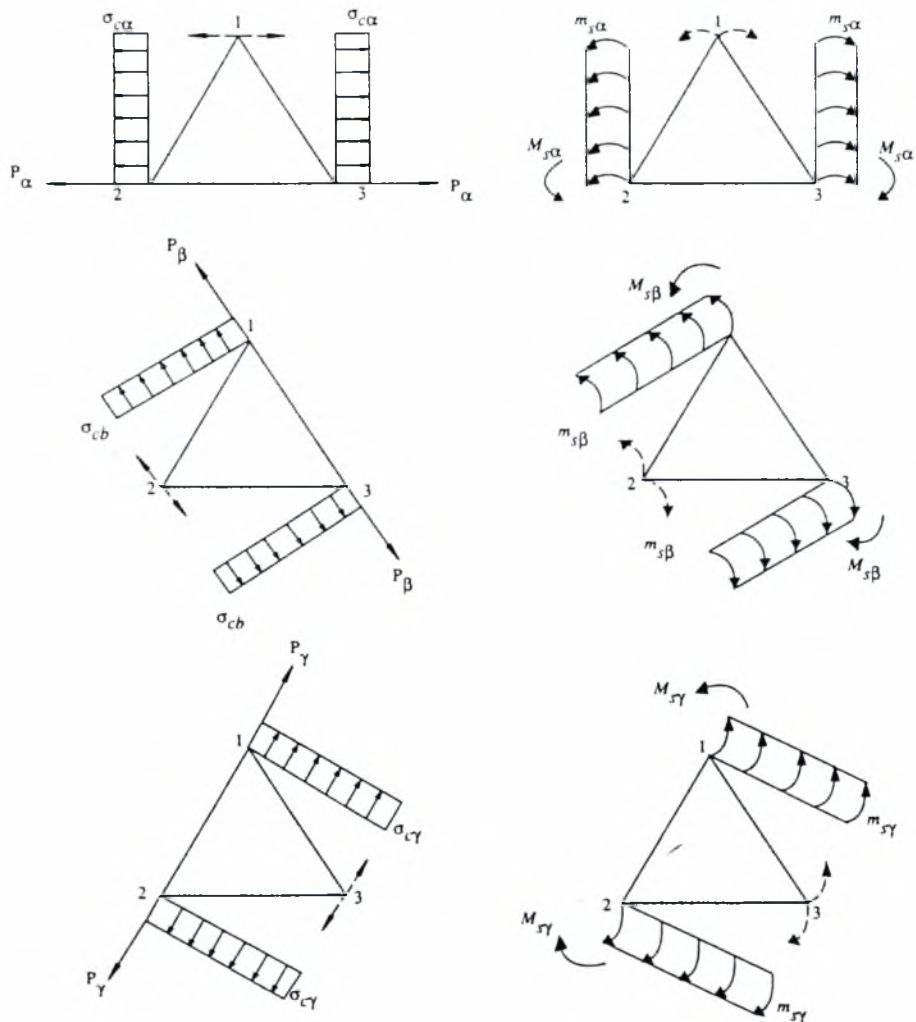
4.5 Εντατικά μεγέθη – Εξισώσεις ισορροπίας

Οι αξονικές τάσεις παράγουν αξονικές δυνάμεις και συμμετρικές ροπές, στα άκρα κάθε πλευράς του τριγώνου. Οι δυνάμεις και οι ροπές αυτές έχουν ίσο μέτρο και είναι αντίθετης φοράς. Για την εμπλοκή εγκαρσίων διατμητικών δυνάμεων στο στοιχείο εισάγεται ένα ζεύγος αντισυμμετρικών ροπών σε κάθε πλευρά του τριγώνου. Για να ικανοποιηθεί η ισορροπία είναι απαραίτητη η ύπαρξη διατμητικών δυνάμεων. Επιπρόσθετα, εισάγονται και τρεις αξιμούθιες ροπές, $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma$, μία ανά κάθε κορυφή του τριγώνου. Οι αξονικές δυνάμεις και οι συμμετρικές ροπές δίνονται από τις σχέσεις (4.62) και (4.63) αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \frac{1}{2} \sigma_{ca} h_\alpha h = \frac{\Omega}{l_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ca}^k dz, \\ P_\beta &= \frac{1}{2} \sigma_{cb} h_\beta h = \frac{\Omega}{l_\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{cb}^k dz, \\ P_\gamma &= \frac{1}{2} \sigma_{cy} h_\gamma h = \frac{\Omega}{l_\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{cy}^k dz \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} M_{s\alpha} &= \frac{1}{2} m_{s\alpha} h_\alpha h = \frac{\Omega}{l_\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{ca}^k dz, \\ M_{s\beta} &= \frac{1}{2} m_{s\beta} h_\beta h = \frac{\Omega}{l_\beta} \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{cb}^k dz, \\ M_{s\gamma} &= \frac{1}{2} m_{s\gamma} h_\gamma h = \frac{\Omega}{l_\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{cy}^k dz \end{aligned} \quad (4.63)$$

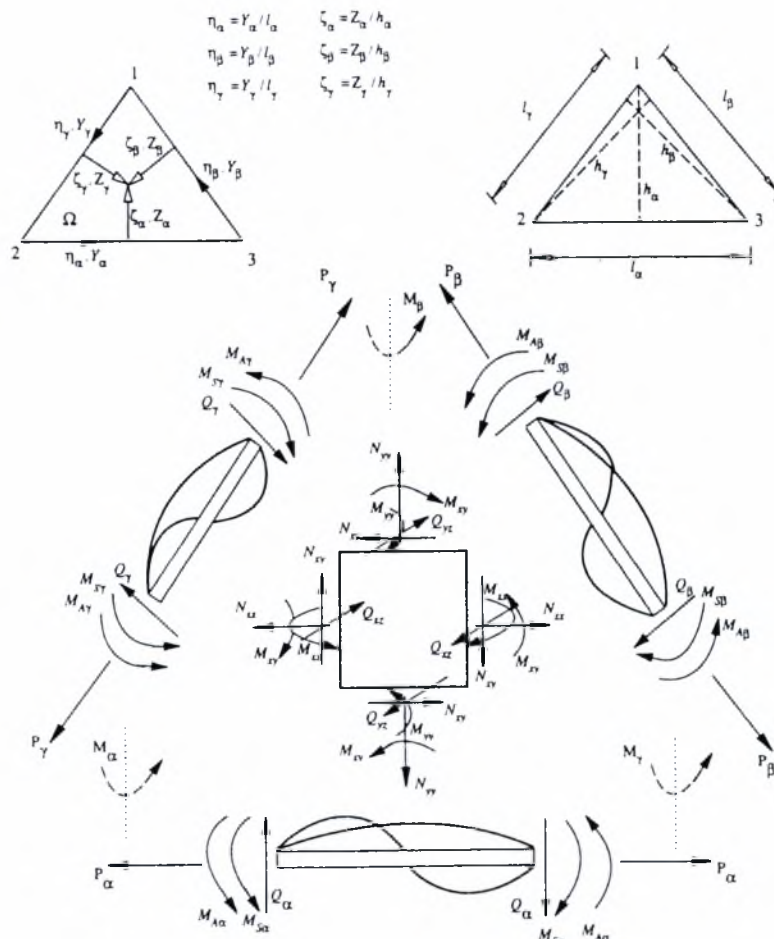
όπου $m_{s\alpha}, m_{s\beta}, m_{s\gamma}$ είναι οι συμμετρικές ροπές ανά μονάδα μήκους στις πλευρές α, β και γ του τριγώνου αντίστοιχα. Το h είναι το συνολικό πάχος των στρώσεων του τριγωνικού στοιχείου. Οι επικόμβιες δυνάμεις και οι κατανεμημένες συμμετρικές ροπές φαίνονται στο σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.10 : Συνιστώσες δυνάμεις και επικόμβιες τάσεις και ροπές

Η ισορροπία σε κάθε πλευρά του τριγώνου όπως είναι φανερό και από το παραπάνω σχήμα, απαιτεί :

$$\begin{aligned}
 P_\alpha &\equiv P_\alpha \\
 P_\beta &\equiv P_\beta \\
 P_\gamma &\equiv P_\gamma \\
 M_{S\alpha} &\equiv M_{S\alpha} \\
 M_{S\beta} &\equiv M_{S\beta} \\
 M_{S\gamma} &\equiv M_{S\gamma} \\
 Q_\alpha - \frac{2M_{A\alpha}}{l_\alpha} &= 0 \\
 Q_\beta - \frac{2M_{A\beta}}{l_\beta} &= 0 \\
 Q_\gamma - \frac{2M_{A\gamma}}{l_\gamma} &= 0 \\
 M_\alpha + M_\beta + M_\gamma &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.64}$$



Σχήμα 4.11 : Οι δώδεκα φυσικές συνιστώσες δυνάμεις και ροπές

Το διάνυσμα των φυσικών δυνάμεων και των ροπών φαίνεται στο σχήμα 4.11 και είναι το παρακάτω :

$$P_N = \underbrace{\left\{ P_{N\alpha} \quad P_{N\beta} \quad P_{N\gamma} \quad M_{S\alpha} \quad M_{S\beta} \quad M_{S\gamma} \quad M_{\alpha} \quad M_{\beta} \quad M_{\gamma} \right\}^t}_{\text{γενικές φυσικές δυνάμεις}} \quad (4.65)$$

Οι σχέσεις μεταξύ των καρτεσιανών και των φυσικών εσωτερικών δυνάμεων δίνονται από τις σχέσεις (4.66) όπου B είναι το μητρώο που ορίστηκε από την σχέση (4.11):

$$\begin{Bmatrix} P_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & . \\ . & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_N \\ M_N \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

$$Q_C = \begin{bmatrix} c_{\alpha x'} & c_{\beta x'} & c_{\gamma x'} \\ c_{\alpha y'} & c_{\beta y'} & c_{\gamma y'} \end{bmatrix} Q_N$$

όπου είναι :

$$P_N = \begin{Bmatrix} P_{N\alpha} \\ P_{N\beta} \\ P_{N\gamma} \end{Bmatrix} \quad P_C = \begin{Bmatrix} N_{xx'} \\ N_{yy'} \\ \sqrt{2}N_{xy'} \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

$$M_S = \begin{Bmatrix} M_{S\alpha} \\ M_{S\beta} \\ M_{S\gamma} \end{Bmatrix} \quad M_C = \begin{Bmatrix} M_{xx'} \\ M_{yy'} \\ \sqrt{2}M_{xy'} \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

$$Q_N = \begin{Bmatrix} Q_{\alpha} \\ Q_{\beta} \\ Q_{\gamma} \end{Bmatrix} \quad Q_C = \begin{Bmatrix} Q_{xz'} \\ Q_{yz'} \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

4.6 Φυσικές μορφές – Φυσικό μητρώο ακαμψίας

Στο σχήμα 4.12 φαίνεται ένα τριγωνικό στοιχείο κελύφους TRIC. Σύμφωνα με τη μέθοδο των φυσικών μορφών, η φυσική ακαμψία προέρχεται μόνο από την παραμόρφω-

ση του στοιχείου και όχι από τις κινήσεις στερεού σώματος. Το στοιχείο, στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα, έχει δεκαοκτώ βαθμούς ελευθερίας δηλαδή από έξι σε κάθε κόμβο. Οι μετατοπίσεις που αντιστοιχούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας συγκεντρώνονται στο καθολικό διάνυσμα ρ . Το ρ ορίζεται από το τοπικό διάνυσμα ρ' μετά από τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.

$$\rho' = \{u' \quad v' \quad w' \quad \theta' \quad \phi' \quad \psi'\}_n$$

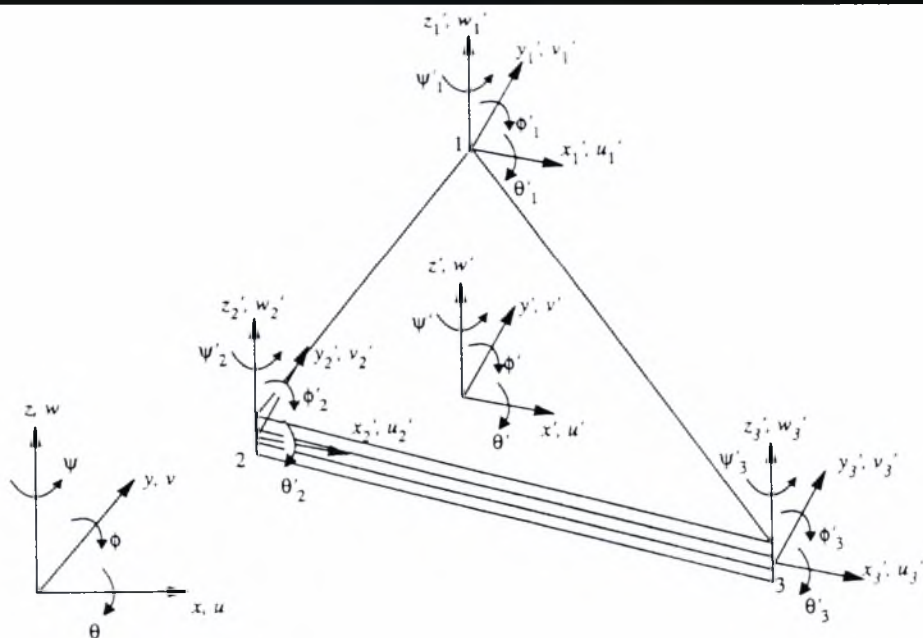
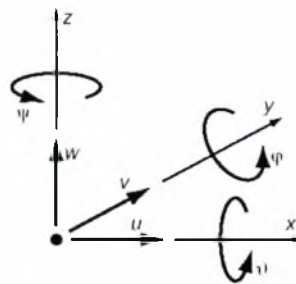
(18x1)

$$n=1,2,3$$

$$\rho = \{u \quad v \quad w \quad \theta \quad \phi \quad \psi\}_n$$

(18x1)

Επικόμβιοι Βαθμοί Ελευθερίας: u, v, w είναι οι μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας και θ, ϕ, ψ οι στρωφικοί.

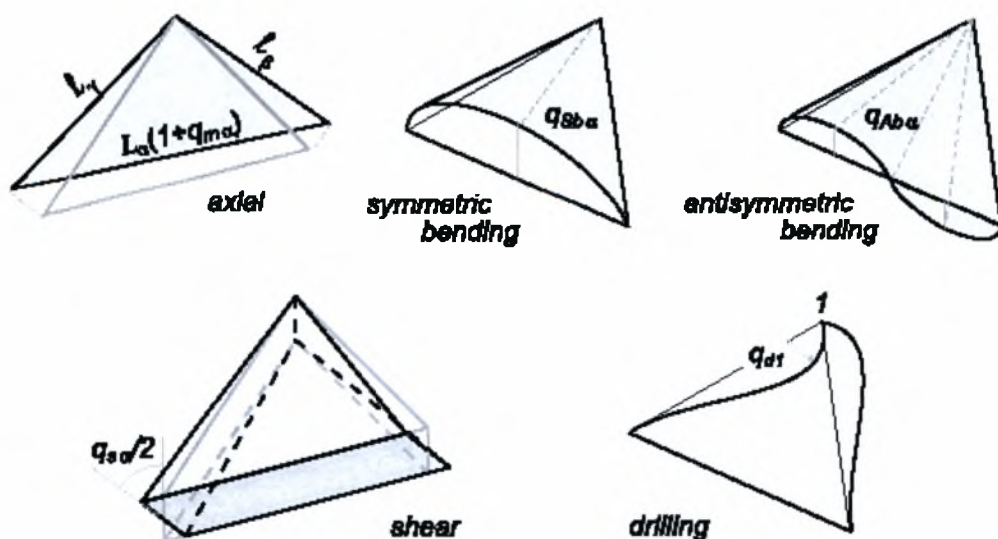


Σχήμα 4.12 : Το τριγωνικό στοιχείο TRIC - επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας.

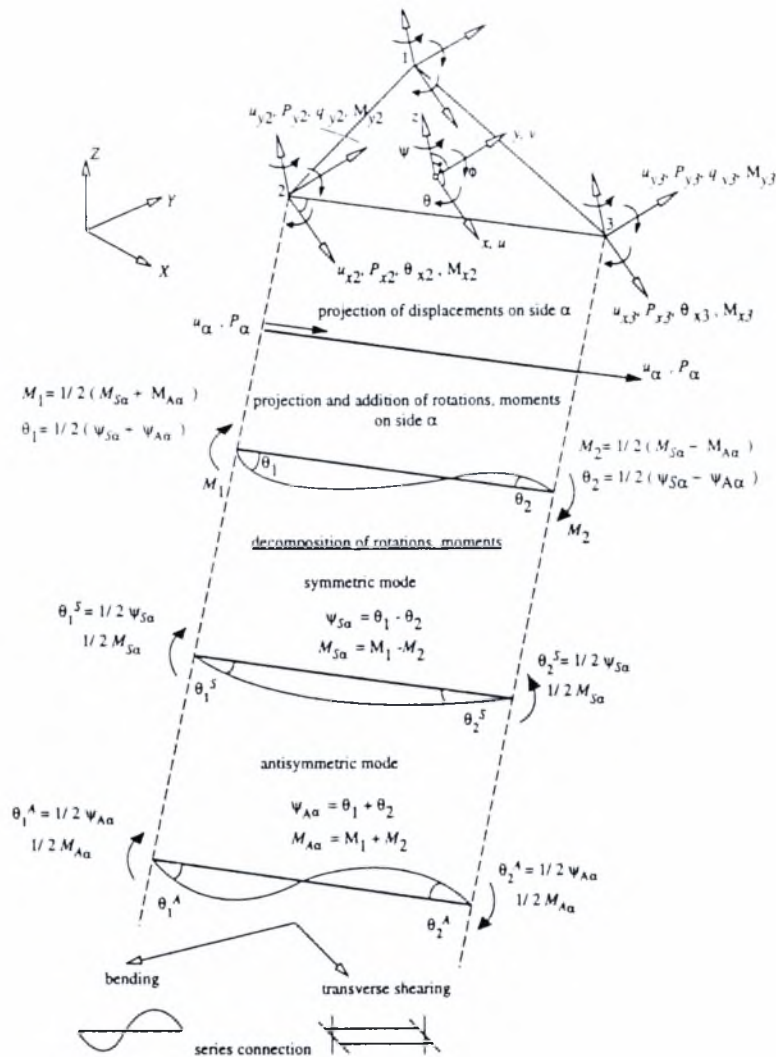
Ο αριθμός των παραμορφωσιακών μορφών του στοιχείου είναι ίσος με τη διαφορά του πλήθους των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας του στοιχείου και του πλήθους των κινήσεων στερεού σώματος που μπορεί το στοιχείο να εκτελέσει στο χώρο, δηλαδή:

$$18 \text{ καρτεσιανοί β.ε.} - 6 \text{ κινήσεις στερεού σώματος} = 12 \text{ παραμορφωσιακές μορφές}$$

Για να μπορέσουμε να εξάγουμε τις παραμορφωσιακές μορφές του στοιχείου προβάλλουμε τις επικόμβιες μετατοπίσεις και στροφές καθώς και τις αντίστοιχες εσωτερικές δυνάμεις και ροπές σε κάθε μία από τις πλευρές του τριγώνου, όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.14. Από τις προβολές αυτές, ορίζονται οι αξονικές, οι συμμετρικές και οι αντισυμμετρικές μορφές για κάθε μία πλευρά του τριγώνου. Οι αντισυμμετρικές μορφές είναι το άθροισμα των αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών και των αντισυμμετρικών διατμητικών μορφών (διατμητικές δυνάμεις που απαιτούνται για να εξασφαλισθεί η ισορροπία) και αποτελούν το κλειδί για την απάλειψη του φαινομένου της παρασιτικής δυσκαμψίας. Οι φυσικές μορφές συμπληρώνονται από τις τρεις στροφές (drillings), μια σε κάθε κόμβο, που είναι κάθετες στο επίπεδο του στοιχείου και καλούνται αξιμούθιες στροφές (4.13).



Σχήμα 4.13 : Παραμορφωσιακές μορφές στο τριγωνικό στοιχείο Tric.



Σχήμα 4.14 : Προβολή και διαχωρισμός επικόμβιων στροφών και ροπών

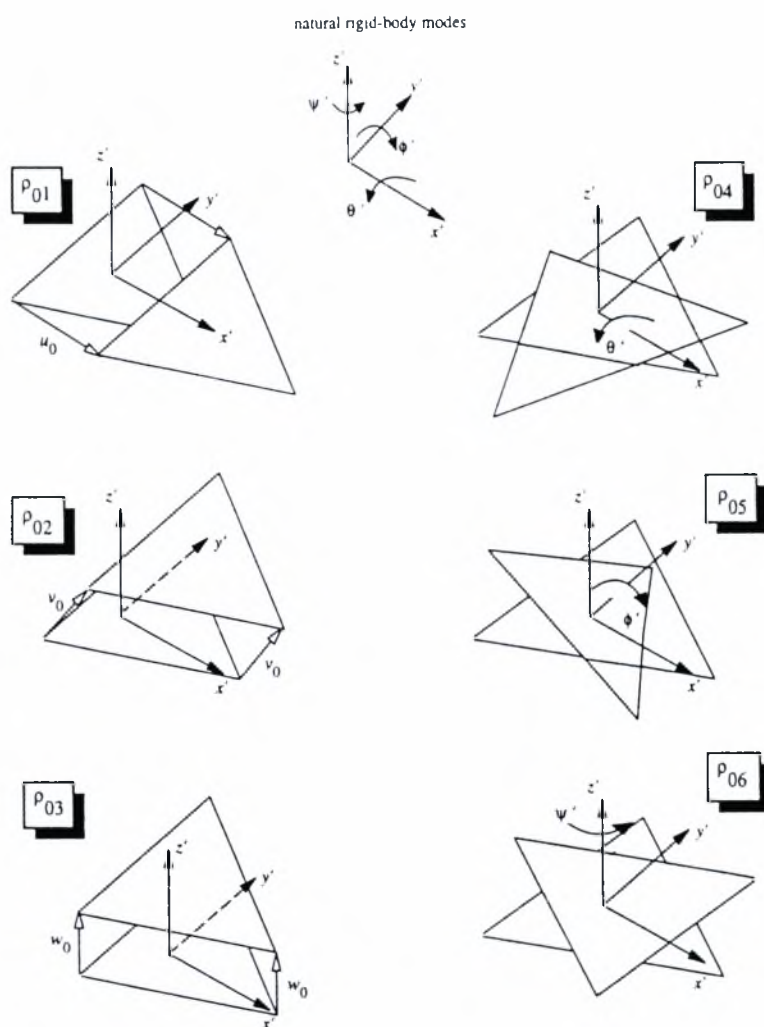
Οι 6 κινήσεις στερεού σώματος και οι 12 παραμορφωσιακές μορφές του στοιχείου TRIC που φαίνονται στα σχήματα 4.15 και 4.16 ομαδοποιούνται στο διάνυσμα :

$$\rho_e = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_N \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

(18×1) $\begin{matrix} \rho_0 \\ (6 \times 1) \\ \rho_N \\ (12 \times 1) \end{matrix}$

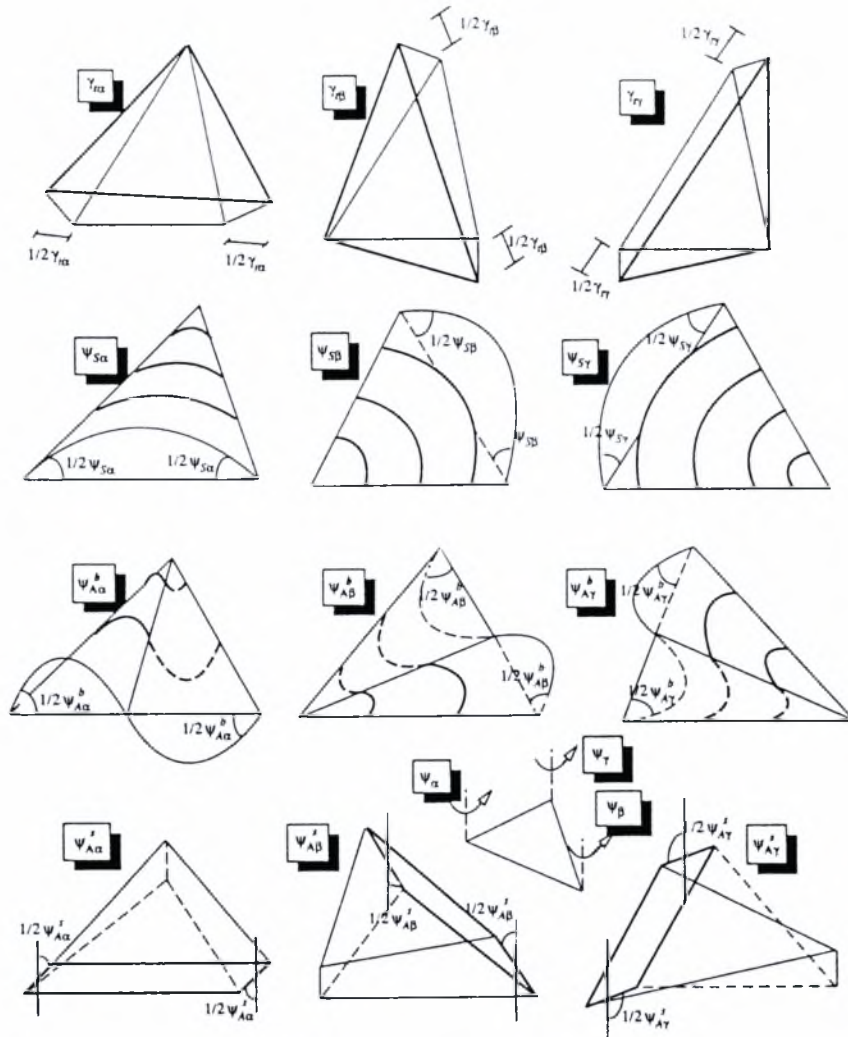
όπου τα διανύσματα ρ_0 είναι οι 6 μορφές στερεού σώματος και ρ_N οι 12 παραμορφωσιακές μορφές αντίστοιχα, οι οποίες φαίνονται στα αντίστοιχα διανύσματα

(4.71) και (4.72) :



Σχήμα 4.15 : Οι 6 φυσικές μορφές στερεού σώματος ρ_0
(6x1)

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} \rho_{01} \\ \rho_{02} \\ \rho_{03} \\ \rho_{04} \\ \rho_{05} \\ \rho_{06} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{μεταφορική στερεά κίνηση κατά } x' \text{ άξονα} \\ \rightarrow \text{μεταφορική στερεά κίνηση κατά } y' \text{ άξονα} \\ \rightarrow \text{μεταφορική στερεά κίνηση κατά } z' \text{ άξονα} \\ \rightarrow \text{στροφική στερεά κίνηση κατά } x' \text{ άξονα} \\ \rightarrow \text{στροφική στερεά κίνηση κατά } y' \text{ άξονα} \\ \rightarrow \text{στροφική στερεά κίνηση κατά } z' \text{ άξονα} \end{array} \quad (4.71)$$



Σχήμα 4.16 : Οι 12 φυσικές παραμορφωσιακές μορφές ρ_N
(12x1)

$$\rho_N = \begin{bmatrix} \gamma_{ta}^0 \\ \gamma_{tb}^0 \\ \gamma_{tg}^0 \\ \psi_{Sa} \\ \psi_{Sb} \\ \psi_{S\gamma} \\ \psi_{Aa} \\ \psi_{Ab} \\ \psi_{A\gamma} \\ \psi_{\alpha} \\ \psi_{\beta} \\ \psi_{\gamma} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{αξονική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \alpha \\ \rightarrow \text{αξονική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \beta \\ \rightarrow \text{αξονική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \gamma \\ \rightarrow \text{συμμετρική καμπτική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \alpha \\ \rightarrow \text{συμμετρική καμπτική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \beta \\ \rightarrow \text{συμμετρική καμπτική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \gamma \\ \rightarrow \text{αντισυμ. καμπτική + διατμητική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \alpha \\ \rightarrow \text{αντισυμ. καμπτική + διατμητική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \beta \\ \rightarrow \text{αντισυμ. καμπτική + διατμητική μορφή κατά μήκος της πλευράς } \gamma \\ \rightarrow \text{αξιμούθια στροφική μορφή στον κόμβο } 1 \\ \rightarrow \text{αξιμούθια στροφική μορφή στον κόμβο } 2 \\ \rightarrow \text{αξιμούθια στροφική μορφή στον κόμβο } 3 \end{array} \quad (4.72)$$

Είναι πολύ σημαντικό να σημειωθεί ότι οι αντισυμμετρικές μορφές είναι το άθροισμα των αντισυμμετρικά καμπτικών και διατμητικών μορφών κατά μήκος μιας πλευράς του τριγωνικού στοιχείου.

$$\Psi_{Ai} = \Psi_{Ai}^b + \Psi_{Ai}^s, \quad i = \alpha, \beta, \gamma$$

Στα διανύσματα ρ_0 , ρ_N αντιστοιχούν τα διανύσματα των δυνάμεων και των ρο-

(6x1) (12x1)

πών των παρακάτω σχέσεων :

$$\rho_0^1 = \{\rho_{01} \quad \rho_{02} \quad \rho_{03}\} \longrightarrow P_0 = \{P_{01} \quad P_{02} \quad P_{03}\} \quad (4.73)$$

$$\rho_0^2 = \{\rho_{04} \quad \rho_{05} \quad \rho_{06}\} \longrightarrow M_0 = \{M_{01} \quad M_{02} \quad M_{03}\} \quad (4.74)$$

$$\gamma_i^0 = \{\gamma_\alpha^0 \quad \gamma_\beta^0 \quad \gamma_\gamma^0\} \longrightarrow P_N = \{P_\alpha l_\alpha \quad P_\beta l_\beta \quad P_\gamma l_\gamma\} \quad (4.75)$$

$$\Psi_S = \{\Psi_{S\alpha} \quad \Psi_{S\alpha} \quad \Psi_{S\alpha}\} \longrightarrow M_S = \{M_{S\alpha} \quad M_{S\beta} \quad M_{S\gamma}\} \quad (4.76)$$

$$\Psi_A = \{\Psi_{A\alpha} \quad \Psi_{A\alpha} \quad \Psi_{A\alpha}\} \longrightarrow M_A = \{M_{A\alpha} \quad M_{A\beta} \quad M_{A\gamma}\} \quad (4.77)$$

$$\Psi_z = \{\Psi_\alpha \quad \Psi_\alpha \quad \Psi_\alpha\} \longrightarrow M_A = \{M_\alpha \quad M_\beta \quad M_\gamma\} \quad (4.78)$$

Όλα τα μητρώα είναι εκφρασμένα πρώτα στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα $x'y'z'$ που φαίνεται στο σχήμα 4.0 και μετασχηματίζεται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων xyz . Έχουμε ορίσει τα διανύσματα μετατοπίσεων ρ και ρ' τα οποία περιέχουν τους αξονικούς βαθμούς ελευθερίας στο καθολικό και το τοπικό σύστημα συντεταγμένων αντίστοιχα :

$$\rho'_n = \{u' \quad v' \quad w' \quad \theta' \quad \varphi' \quad \psi'\}_n \quad n=1,2,3 \quad (4.79)$$

$$\rho_n = \{u \quad v \quad w \quad \theta \quad \varphi \quad \psi\}_n$$

Το διάνυσμα των 12 παραμορφωσιακών μορφών ρ_N συνδέεται με το διάνυσμα ρ' μέσω

(12x1)

(18x1)

της σχέσης (4.80) :

$$\rho_N = \bar{\alpha}_N \rho' \quad (4.80)$$

(12x1) (18x1)

Το μητρώο \bar{a}_N εξαρτάται από την γεωμετρία του στοιχείου και θα υπολογιστεί στη Παράγραφο 4.11.

Το τοπικό διάνυσμα ρ' _(18x1) συνδέεται με το καθολικό διάνυσμα ρ _(18x1) μέσω της σχέσης (4.81) :

$$\rho' = T_{06} \rho \quad (4.81)$$

όπου το μητρώο T_{06} είναι το γνωστό μητρώο περιστροφής, με τα συνημίτονα κατευθύνσεως :

$$T_{06} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 \end{pmatrix}, \quad T_0 = \begin{pmatrix} c_{x'x} & c_{x'y} & c_{x'z} \\ c_{y'x} & c_{y'y} & c_{y'z} \\ c_{z'x} & c_{z'y} & c_{z'z} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.80) και (4.81) έχουμε :

$$\rho_N = \bar{a}_N \rho' = \bar{a}_N T_{06} \rho \quad (4.82)$$

4.7 Συνολική παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα

4.7.1 Παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα λόγω αξονικών και συμμετρικών καμπτικών μορφών

Η συνολική κατακόρυφη παραμόρφωση w_i κατά μήκος μιας πλευράς $i = \alpha, \beta, \gamma$ λόγω συμμετρικών και αντισυμμετρικών μορφών γράφεται (Παράρτημα Α).

$$w_i = \underbrace{\frac{1}{2} \left(-\frac{Y_i^2}{I_i} + Y_i \right) \psi_{Si}}_{\text{συμμετρική καμπτική μορφή}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(Y_i - \frac{3Y_i^2}{I_i} + \frac{2Y_i^3}{I_i^2} \right) \psi_{Ai}}_{\text{αντισυμμετρική καμπτική μορφή}} \quad (4.83)$$

όπου ($i = \alpha, \beta, \gamma$) και $Y_i = 0 \div I_i$

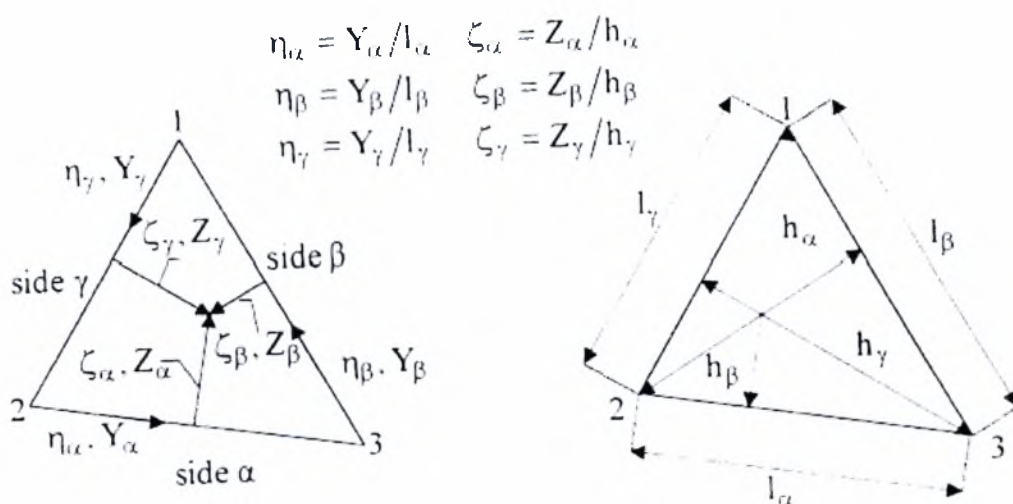
Κάτω από σταθερή ένταση κατά μήκος της πλευράς α , η μετατόπιση στο μέσο επίπεδο του στοιχείου (Συμβολισμός : u^0) εκφρασμένη ως προς τις φυσικές συντεταγμένες (σχήμα 4.17) δίνεται από :

$$u_{\alpha}^0 = l_{\alpha} \left(\eta_{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \gamma_{\alpha}^i \quad (4.84)$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει και για τις άλλες δύο φυσικές διευθύνσεις, δηλαδή :

$$u_{\beta}^0 = l_{\beta} \left(\eta_{\beta} - \frac{1}{2} \right) \gamma_{\beta}^i \quad (4.85)$$

$$u_{\gamma}^0 = l_{\gamma} \left(\eta_{\gamma} - \frac{1}{2} \right) \gamma_{\gamma}^i \quad (4.86)$$



Σχήμα 4.17 : Ορισμός φυσικών συντεταγμένων σε ένα τρίγωνο

Η μετατόπιση κατά μήκος μιας φυσικής διεύθυνσης του στοιχείου, όταν αυτό βρίσκεται υπό αξονική και καμπτική ένταση δίνεται από την σχέση :

$$u_i = u_i^0 - z \frac{\partial w}{\partial Y_i}, \quad i = \alpha, \beta, \gamma \quad (4.87)$$

και η συνολική αξονική παραμόρφωση κατά μήκος μιας φυσικής διεύθυνσης του στοιχείου δίνεται από την σχέση :

$$\gamma_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial Y_i}, \quad i=\alpha, \beta, \gamma \quad (4.88)$$

$$\gamma_{ii} = \frac{\partial u_i^0}{\partial Y_i} - z \frac{\partial^2 w}{\partial Y_i^2} = \gamma_{ii}^0 + z \frac{\Psi_{Si}}{l_i} + z \left(\frac{3}{l_i} - \frac{6Y_i}{l_i^2} \right) \Psi_{Ai} = \gamma_{ii}^0 + z \frac{\Psi_{Si}}{l_i}$$

Επειδή η συμβολή της αντισυμμετρικής καμπτικής μορφής στη συνολική αξονική παραμόρφωση είναι αμελητέα μπορεί να αγνοηθεί. Έχοντας υπόψη αυτήν την παραδοχή, η **συνολική αξονική παραμόρφωση** για κάθε πλευρά του τριγώνου γράφεται :

$$\begin{aligned} \gamma_{ia} &= \gamma_{ia}^0 + z \frac{\Psi_{Sa}}{l_a} \\ \gamma_{ib} &= \gamma_{ib}^0 + z \frac{\Psi_{Sb}}{l_b} \\ \gamma_{iy} &= \gamma_{iy}^0 + z \frac{\Psi_{Sy}}{l_y} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Γράφουμε την σχέση που συνδέει, τις συνολικές παραμορφώσεις γ_{ii} με το διάνυσμα των φυσικών μετατοπίσεων ρ_N και τα διανύσματα των καρτεσιανών μετατοπίσεων ρ στο τοπικό σύστημα ρ' και στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων ρ .

$$\gamma_t = \alpha_N \rho_N \stackrel{(4.82)}{=} \alpha_N \bar{\alpha}_N \rho' \stackrel{(4.82)}{=} \alpha_N \bar{\alpha}_N T_{06} \rho \quad (4.90)$$

Παρατηρώντας την σχέση (4.90) βλέπουμε ότι το μητρώο α_N είναι το εξής :

$$\gamma_t = \alpha_N \rho_N \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{ia} \\ \gamma_{ib} \\ \gamma_{iy} \end{pmatrix} = [\alpha_N] \begin{pmatrix} \gamma_{ia}^0 \\ \gamma_{ib}^0 \\ \gamma_{iy}^0 \\ \Psi_{Sa} \\ \Psi_{Sb} \\ \Psi_{Sy} \\ \Psi_{Aa} \\ \Psi_{Ab} \\ \Psi_{Ay} \\ \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_y \end{pmatrix} \stackrel{4.89}{\Rightarrow} \alpha_N \stackrel{3 \times 12}{=} \begin{bmatrix} 1 & . & . & \frac{z}{l_a} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & \frac{z}{l_b} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & \frac{z}{l_y} & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

4.7.2 Παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα λόγω αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών

Η αντισυμμετρική μορφή που επιλέχθηκε είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού (Παράρτημα Α). Η κατακόρυφη μετατόπιση λόγω αντισυμμετρικών μορφών για κάθε μία πλευρά του τριγώνου, εκφρασμένη ως προς τις φυσικές ή τριγωνικές συντεταγμένες είναι :

$$\begin{aligned} w_{A\alpha} &= \frac{1}{2} l_{\alpha} \zeta_{\beta} \zeta_{\gamma} (\zeta_{\beta} - \zeta_{\gamma}) \psi^b_{A\alpha} \\ w_{A\beta} &= \frac{1}{2} l_{\beta} \zeta_{\gamma} \zeta_{\alpha} (\zeta_{\gamma} - \zeta_{\alpha}) \psi^b_{A\beta} \\ w_{A\gamma} &= \frac{1}{2} l_{\gamma} \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta} (\zeta_{\alpha} - \zeta_{\beta}) \psi^b_{A\gamma} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων λόγω αντισυμμετρικών μορφών χρειάζονται οι δύο πιο κάτω σχέσεις (4.93) και (4.94) που προκύπτουν με χρήση της αναλυτικής γεωμετρίας στο φυσικό σύστημα του τριγώνου (Παράρτημα Α) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_A}{\partial \zeta} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_{\alpha}} & \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_{\beta}} & \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_{\gamma}} \\ \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_{\alpha}} & \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_{\beta}} & \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_{\gamma}} \\ \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_{\alpha}} & \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_{\beta}} & \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_{\gamma}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & (2l_{\alpha}\zeta_{\beta}\zeta_{\gamma} - l_{\alpha}\zeta_{\gamma}^2) \psi^b_{A\alpha} & (-2l_{\alpha}\zeta_{\beta}\zeta_{\gamma} + l_{\alpha}\zeta_{\beta}^2) \psi^b_{A\alpha} \\ (-2l_{\beta}\zeta_{\gamma}\zeta_{\alpha} + l_{\beta}\zeta_{\gamma}^2) \psi^b_{A\beta} & \cdot & (2l_{\beta}\zeta_{\gamma}\zeta_{\alpha} - l_{\beta}\zeta_{\alpha}^2) \psi^b_{A\beta} \\ (2l_{\gamma}\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta} - l_{\gamma}\zeta_{\beta}^2) \psi^b_{A\gamma} & (-2l_{\gamma}\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta} + l_{\gamma}\zeta_{\alpha}^2) \psi^b_{A\gamma} & \cdot \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_{\alpha}}{\partial \eta_{\alpha}} & \frac{\partial \zeta_{\alpha}}{\partial \eta_{\beta}} & \frac{\partial \zeta_{\alpha}}{\partial \eta_{\gamma}} \\ \frac{\partial \zeta_{\beta}}{\partial \eta_{\alpha}} & \frac{\partial \zeta_{\beta}}{\partial \eta_{\beta}} & \frac{\partial \zeta_{\beta}}{\partial \eta_{\gamma}} \\ \frac{\partial \zeta_{\gamma}}{\partial \eta_{\alpha}} & \frac{\partial \zeta_{\gamma}}{\partial \eta_{\beta}} & \frac{\partial \zeta_{\gamma}}{\partial \eta_{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & -1 \\ -1 & \cdot & 1 \\ 1 & -1 & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.94)$$



Οι οριζόντιες μετατοπίσεις στις τρεις φυσικές πλευρές του τριγώνου είναι :

$$u^{aa} = -z \frac{\partial w_{Aa}}{\partial Y_a}, \quad u^{ab} = -z \frac{\partial w_{Aa}}{\partial Y_b}, \quad u^{ay} = -z \frac{\partial w_{Aa}}{\partial Y_y} \quad (4.95)$$

$$u^{ba} = -z \frac{\partial w_{Ab}}{\partial Y_a}, \quad u^{bb} = -z \frac{\partial w_{Ab}}{\partial Y_b}, \quad u^{by} = -z \frac{\partial w_{Ab}}{\partial Y_y} \quad (4.96)$$

$$u^{ya} = -z \frac{\partial w_{Ay}}{\partial Y_a}, \quad u^{yb} = -z \frac{\partial w_{Ay}}{\partial Y_b}, \quad u^{yy} = -z \frac{\partial w_{Ay}}{\partial Y_y} \quad (4.97)$$

ή ως προς την φυσική συντεταγμένη η :

$$u^{aa} = -z \frac{1}{l_a} \frac{\partial w_{Aa}}{\partial \eta_a}, \quad u^{ab} = -z \frac{1}{l_b} \frac{\partial w_{Aa}}{\partial \eta_b}, \quad u^{ay} = -z \frac{1}{l_y} \frac{\partial w_{Aa}}{\partial \eta_y} \quad (4.98)$$

$$u^{ba} = -z \frac{1}{l_a} \frac{\partial w_{Ab}}{\partial \eta_a}, \quad u^{bb} = -z \frac{1}{l_b} \frac{\partial w_{Ab}}{\partial \eta_b}, \quad u^{by} = -z \frac{1}{l_y} \frac{\partial w_{Ab}}{\partial \eta_y} \quad (4.99)$$

$$u^{ya} = -z \frac{1}{l_a} \frac{\partial w_{Ay}}{\partial \eta_a}, \quad u^{yb} = -z \frac{1}{l_b} \frac{\partial w_{Ay}}{\partial \eta_b}, \quad u^{yy} = -z \frac{1}{l_y} \frac{\partial w_{Ay}}{\partial \eta_y} \quad (4.100)$$

Η συνολική παραμόρφωση λόγω της αντισυμμετρικής κάμψης γ_{ii}^b ($i=\alpha,\beta,\gamma$), από τις παραπάνω σχέσεις (4.95 – 4.100) γράφεται :

$$\begin{aligned} \gamma_{ia}^b &= -z \frac{1}{l_a^2} \frac{\partial u^{aa}}{\partial \eta_a} - z \frac{1}{l_a^2} \frac{\partial u^{ba}}{\partial \eta_a} - z \frac{1}{l_a^2} \frac{\partial u^{ya}}{\partial \eta_a} \\ \gamma_{ib}^b &= -z \frac{1}{l_b^2} \frac{\partial u^{ab}}{\partial \eta_b} - z \frac{1}{l_b^2} \frac{\partial u^{bb}}{\partial \eta_b} - z \frac{1}{l_b^2} \frac{\partial u^{yb}}{\partial \eta_b} \\ \gamma_{iy}^b &= -z \frac{1}{l_y^2} \frac{\partial u^{ay}}{\partial \eta_y} - z \frac{1}{l_y^2} \frac{\partial u^{by}}{\partial \eta_y} - z \frac{1}{l_y^2} \frac{\partial u^{yy}}{\partial \eta_y} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Για τον υπολογισμό των γ_{ii}^b ($i = \alpha, \beta, \gamma$), από τις παραπάνω σχέσεις γίνονται οι ακόλουθες παραγωγίσεις, χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης αλυσίδας.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \eta_\alpha} &= \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} \\
\frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \eta_\beta} &= \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} \\
\frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \eta_\gamma} &= \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \eta_\alpha} &= \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} \\
\frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \eta_\beta} &= \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} \\
\frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \eta_\gamma} &= \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \eta_\alpha} &= \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} \\
\frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \eta_\beta} &= \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} \\
\frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \eta_\gamma} &= \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (4.93) και (4.94), υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι της σχέσης (4.101) :

$$\begin{aligned}
u^{a\alpha} &= -z \frac{1}{l_\alpha} \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \eta_\alpha} = -z \frac{1}{l_\alpha} \left[\frac{1}{2} l_\alpha \zeta_\beta^2 + \frac{1}{2} l_\alpha \zeta_\gamma^2 - 2 l_\alpha \zeta_\beta \zeta_\gamma \right] \psi_{A\alpha}^b \\
u^{a\beta} &= -z \frac{1}{l_\beta} \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \eta_\beta} = -z \frac{1}{l_\beta} \left[-\frac{1}{2} l_\alpha \zeta_\beta^2 + l_\alpha \zeta_\beta \zeta_\gamma \right] \psi_{A\alpha}^b \\
u^{a\gamma} &= -z \frac{1}{l_\gamma} \frac{\partial w_{A\alpha}}{\partial \eta_\gamma} = -z \frac{1}{l_\gamma} \left[-\frac{1}{2} l_\alpha \zeta_\gamma^2 + l_\alpha \zeta_\beta \zeta_\gamma \right] \psi_{A\alpha}^b
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}
u^{\beta\alpha} &= -z \frac{1}{l_\alpha} \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \eta_\alpha} = -z \frac{1}{l_\alpha} \left[-\frac{1}{2} l_\beta \zeta_\alpha^2 + l_\beta \zeta_\gamma \zeta_\alpha \right] \Psi_{A\beta}^b \\
u^{\beta\beta} &= -z \frac{1}{l_\beta} \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \eta_\beta} = -z \frac{1}{l_\beta} \left[\frac{1}{2} l_\beta \zeta_\alpha^2 + \frac{1}{2} l_\beta \zeta_\gamma^2 - 2l_\beta \zeta_\alpha \zeta_\gamma \right] \Psi_{A\beta}^b \\
u^{\beta\gamma} &= -z \frac{1}{l_\gamma} \frac{\partial w_{A\beta}}{\partial \eta_\gamma} = -z \frac{1}{l_\gamma} \left[-\frac{1}{2} l_\beta \zeta_\gamma^2 + l_\beta \zeta_\gamma \zeta_\alpha \right] \Psi_{A\beta}^b
\end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\begin{aligned}
u^{\gamma\alpha} &= -z \frac{1}{l_\alpha} \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \eta_\alpha} = -z \frac{1}{l_\alpha} \left[-\frac{1}{2} l_\gamma \zeta_\beta^2 + l_\gamma \zeta_\gamma \zeta_\alpha \right] \Psi_{A\gamma}^b \\
u^{\gamma\beta} &= -z \frac{1}{l_\beta} \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \eta_\beta} = -z \frac{1}{l_\beta} \left[-\frac{1}{2} l_\gamma \zeta_\beta^2 + l_\gamma \zeta_\alpha \zeta_\beta \right] \Psi_{A\gamma}^b \\
u^{\gamma\gamma} &= -z \frac{1}{l_\gamma} \frac{\partial w_{A\gamma}}{\partial \eta_\gamma} = -z \frac{1}{l_\gamma} \left[\frac{1}{2} l_\gamma \zeta_\beta^2 + \frac{1}{2} l_\gamma \zeta_\alpha^2 - 2l_\gamma \zeta_\beta \zeta_\alpha \right] \Psi_{A\gamma}^b
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Κάνοντας άλλη μία παραγωγή ως προς την φυσική συντεταγμένη η , προκύπτει η έκφραση της συνολικής παραμόρφωσης.

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\alpha}^b &= -z \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial \eta_\alpha} - z \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial u^{\beta\alpha}}{\partial \eta_\alpha} - z \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial u^{\gamma\alpha}}{\partial \eta_\alpha} \\
&= -z \frac{1}{l_\alpha^2} \left[\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} \right] \\
&\quad - z \frac{1}{l_\alpha^2} \left[\frac{\partial u^{\beta\alpha}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial u^{\beta\alpha}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial u^{\beta\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} \right] \\
&\quad - z \frac{1}{l_\alpha^2} \left[\frac{\partial u^{\gamma\alpha}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial u^{\gamma\alpha}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} + \frac{\partial u^{\gamma\alpha}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} \right] \\
&= -z \frac{1}{l_\alpha^2} \left[3l_\alpha (\zeta_\gamma - \zeta_\beta) \Psi_{A\alpha}^b + \zeta_\alpha l_\beta \Psi_{A\beta}^b - \zeta_\alpha l_\gamma \Psi_{A\gamma}^b \right]
\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\eta\beta}^b &= -z \frac{1}{l_\beta^2} \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial \eta_\beta} - z \frac{1}{l_\beta^2} \frac{\partial u^{\beta\beta}}{\partial \eta_\beta} - z \frac{1}{l_\beta^2} \frac{\partial u^{\gamma\beta}}{\partial \eta_\beta} \\
&= -z \frac{1}{l_\beta^2} \left[\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} \right] \\
&\quad - z \frac{1}{l_\beta^2} \left[\frac{\partial u^{\beta\beta}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial u^{\beta\beta}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial u^{\beta\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} \right] \\
&\quad - z \frac{1}{l_\beta^2} \left[\frac{\partial u^{\gamma\beta}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial u^{\gamma\beta}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial u^{\gamma\beta}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} \right] \\
&= -z \frac{1}{l_\beta^2} \left[-\zeta_\beta l_\alpha \psi_{A\beta}^b + 3l_\beta (\zeta_\alpha - \zeta_\gamma) \psi_{A\alpha}^b + \zeta_\beta l_\alpha \psi_{A\gamma}^b \right]
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\eta\gamma}^b &= -z \frac{1}{l_\gamma^2} \frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial \eta_\gamma} - z \frac{1}{l_\gamma^2} \frac{\partial u^{\beta\gamma}}{\partial \eta_\gamma} - z \frac{1}{l_\gamma^2} \frac{\partial u^{\gamma\gamma}}{\partial \eta_\gamma} \\
&= -z \frac{1}{l_\gamma^2} \left[\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma} \right] \\
&\quad - z \frac{1}{l_\gamma^2} \left[\frac{\partial u^{\beta\gamma}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial u^{\beta\gamma}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial u^{\beta\gamma}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma} \right] \\
&\quad - z \frac{1}{l_\gamma^2} \left[\frac{\partial u^{\gamma\gamma}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial u^{\gamma\gamma}}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} + \frac{\partial u^{\gamma\gamma}}{\partial \zeta_\gamma} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma} \right] \\
&= -z \frac{1}{l_\gamma^2} \left[\zeta_\gamma l_\alpha \psi_{A\alpha}^b - \zeta_\gamma l_\beta \psi_{A\beta}^b + 3l_\gamma (\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \psi_{A\gamma}^b \right]
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Παρατηρώντας την σχέση (4.90) βλέπουμε ότι το μητρώο α_{Nb} που συνδέει τις αξονικές φυσικές παραμορφώσεις γ_i^b με τις αντισυμμετρικές καμπτικές μορφές ψ_A^b είναι το εξής :

$$\gamma_i^b = \alpha_{Nb} \psi_A^b \tag{4.111}$$

όπου

$$\alpha_{Nb}^{3 \times 3} = -z \begin{bmatrix} \frac{1}{l_\alpha^2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{l_\beta^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{l_\gamma^2} \end{bmatrix} [A_h] \begin{bmatrix} l_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & l_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & l_\gamma \end{bmatrix} \tag{4.112}$$

$$A_h = \begin{bmatrix} 3(\zeta_\alpha - \zeta_\beta) & \zeta_\alpha & -\zeta_\alpha \\ -\zeta_\beta & 3(\zeta_\alpha - \zeta_\gamma) & \zeta_\beta \\ \zeta_\gamma & -\zeta_\gamma & 3(\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{και τελικά} \quad (4.113)$$

$$\alpha_{Nb} = -Z \begin{bmatrix} \frac{1}{l_\alpha^2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{l_\beta^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{l_\gamma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3(\zeta_\alpha - \zeta_\beta) & \zeta_\alpha & -\zeta_\alpha \\ -\zeta_\beta & 3(\zeta_\alpha - \zeta_\gamma) & \zeta_\beta \\ \zeta_\gamma & -\zeta_\gamma & 3(\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & l_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & l_\gamma \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

4.8 Όροι ακαμψίας λόγω αξονικής παραμόρφωσης και συμμετρικής κάμψης

Το φυσικό μητρώο ακαμψίας $k_N(\gamma_t^0, \psi_s)$ λόγω των αξονικών μορφών παραμόρφωσης γ_{ti} και των μορφών συμμετρικής κάμψης ψ_{si} υπολογίζεται από την ενέργεια παραμόρφωσης ΔU . Η αρχή των δυνατών έργων στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται :

$$\delta U = \int_V \sigma_c^t \delta \gamma_t dV \quad (4.115)$$

Από την σχέση (4.90) έχουμε :

$$\delta \gamma_t = \alpha_N \delta \rho_N = \alpha_N \bar{\alpha}_N \delta \rho' = \alpha_N \bar{\alpha}_N T_{06} \delta \rho \quad (4.116)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.116) στην σχέση (4.115) έχουμε :

$$\delta U = \int_V \sigma_c^t \delta \gamma_t dV \stackrel{(4.30)}{=} \int_V \gamma_t^t \kappa_{ct} \delta \gamma_t dV = \rho_N^t \underbrace{\left[\int_V \alpha_N^t \kappa_{ct} \alpha_N dV \right]}_{\text{φυσικό μητρώο ακαμψίας}} \delta \rho_N \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned}
zk_{aa} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\kappa_{aa} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \kappa_{aa}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2) \\
zk_{a\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\kappa_{a\beta} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \kappa_{a\beta}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2) \\
zk_{a\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\kappa_{a\gamma} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \kappa_{a\gamma}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2)
\end{aligned}
\tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}
zk_{\beta\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\kappa_{\beta\beta} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \kappa_{\beta\beta}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2) \\
zk_{\beta\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\kappa_{\beta\gamma} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \kappa_{\beta\gamma}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2) \\
zk_{\gamma\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\kappa_{\gamma\gamma} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \kappa_{\gamma\gamma}^k (z_k^2 - z_{k+1}^2) \\
z^2k_{aa} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\kappa_{aa} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \kappa_{aa}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3) \\
z^2k_{a\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\kappa_{a\beta} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \kappa_{a\beta}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3) \\
z^2k_{a\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\kappa_{a\gamma} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \kappa_{a\gamma}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3) \\
z^2k_{\beta\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\kappa_{\beta\beta} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \kappa_{\beta\beta}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3) \\
z^2k_{\beta\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\kappa_{\beta\gamma} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \kappa_{\beta\gamma}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3) \\
z^2k_{\gamma\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2\kappa_{\gamma\gamma} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \kappa_{\gamma\gamma}^k (z_k^3 - z_{k+1}^3)
\end{aligned}
\tag{4.124}$$

4.9 Μητρώο ακαμψίας λόγω αντισυμμετρικών μορφών

Οι αντισυμμετρικές μορφές είναι το άθροισμα της αντισυμμετρικής καμπτικής μορφής ψ_{Ai}^b και της αντισυμμετρικής διατμητικής μορφής ψ_{Ai}^s για κάθε πλευρά του τριγώνου. Έτσι έχουμε :

$$\begin{aligned}\psi_{A\alpha} &= \psi_{A\alpha}^b + \psi_{A\alpha}^s \\ \psi_{A\beta} &= \psi_{A\beta}^b + \psi_{A\beta}^s \\ \psi_{A\gamma} &= \psi_{A\gamma}^b + \psi_{A\gamma}^s\end{aligned}\quad (4.125)$$

Οι αντισυμμετρικές στροφές προκαλούν αντισυμμετρικές ροπές M_A όπου :

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{k}_A \boldsymbol{\psi}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} M_{A\alpha} \\ M_{A\beta} \\ M_{A\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_A^{\alpha\alpha} & k_A^{\alpha\beta} & k_A^{\alpha\gamma} \\ k_A^{\beta\alpha} & k_A^{\beta\beta} & k_A^{\beta\gamma} \\ k_A^{\gamma\alpha} & k_A^{\gamma\beta} & k_A^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{A\alpha} \\ \psi_{A\beta} \\ \psi_{A\gamma} \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

Τα διανύσματα ψ_{Ai}^b και ψ_{Ai}^s μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της ροπής M_A ως εξής:

$$\begin{aligned}M_A &= [\mathbf{k}_A^b] \boldsymbol{\psi}_A^b \\ M_A &= [\mathbf{k}_A^s] \boldsymbol{\psi}_A^s\end{aligned}\quad (4.127)$$

Από την σχέση (4.127) έχουμε :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_A^b &= [\mathbf{k}_A^b]^{-1} M_A \\ \boldsymbol{\psi}_A^s &= [\mathbf{k}_A^s]^{-1} M_A\end{aligned}\quad (4.128)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.128) στη σχέση (4.125) παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\psi}_A = [\mathbf{k}_A^b]^{-1} M_A + [\mathbf{k}_A^s]^{-1} M_A \Rightarrow M_A = \left[[\mathbf{k}_A^b]^{-1} + [\mathbf{k}_A^s]^{-1} \right]^{-1} \boldsymbol{\psi}_A \quad (4.129)$$

όπου είναι :

$$\mathbf{k}_A = \left[[\mathbf{k}_A^b]^{-1} + [\mathbf{k}_A^s]^{-1} \right]^{-1} \quad (4.130)$$

Θέτοντας τους όρους του αντισυμμετρικού διατμητικού μητρώου μηδέν, προκύπτει το αντίστοιχο στοιχείο που βασίζεται στη θεωρία του Kirchhoff η οποία αφορά λεπτούς επιφανειακούς φορείς.

4.9.1 Μητρώο ακαμψίας λόγω αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών $[k_A^b]$

Το μητρώο ακαμψίας k_A^b λόγω αντισυμμετρικών καμπτικών μορφών υπολογίζεται από τη μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης βάσει της αρχής των δυνατών έργων:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \sigma_e^i \delta \gamma_i^b dV = \int_V [\gamma_i^b]^i \kappa_{ci} [\gamma_i^b] dV \\ &= [\psi_A^b]^i \underbrace{\left[\int_V [\alpha_{Nb}]^i \kappa_{ci} [\alpha_{Nb}] dV \right]}_{\text{αντισυμμετρικό καμπτικό μητρώο}} [\psi_A^b] \end{aligned} \quad (4.131)$$

Το αντισυμμετρικό καμπτικό μητρώο δίνεται από τη σχέση (4.132) :

$$k_A^b = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [z^2 l A_h^{-1} l^{-2} \kappa_{ci} l^{-2} A_h^{-1} l] d\Omega dz = \begin{bmatrix} k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} \\ k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} \\ k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Όλοι οι όροι του μητρώου k_A^b προκύπτουν με αναλυτική ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας την γνωστή σχέση ολοκλήρωσης :

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \zeta_{\alpha}^p \zeta_{\beta}^q \zeta_{\gamma}^r d\Omega = \frac{2!p!q!r!}{(2+p+q+r)!} \quad (4.133)$$

Αναλυτικά οι όροι του αντισυμμετρικού καμπτικού μητρώου ακαμψίας είναι :

$$\begin{aligned} k_A^{11} &= \frac{\Omega l_{\alpha}^2}{6 l_{\gamma}^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\gamma\gamma} dz - \frac{\Omega l_{\alpha}^2}{6 l_{\beta}^2 l_{\gamma}^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\gamma} dz + \frac{\Omega l_{\alpha}^2}{6 l_{\beta}^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\beta} dz \\ &+ \frac{\Omega}{2 l_{\gamma}^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\gamma} dz + \frac{\Omega}{2 l_{\beta}^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\beta} dz + \frac{3\Omega}{2 l_{\alpha}^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\alpha} dz \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned}
k_A^{22} = & \frac{\Omega l_\beta^2}{6l_\gamma^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\gamma\gamma} dz + \frac{\Omega}{6l_\gamma^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\gamma} dz + \frac{3\Omega}{2l_\beta^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\beta} dz \\
& - \frac{\Omega l_\beta^2}{6l_\alpha^2 l_\gamma^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\gamma} dz + \frac{\Omega}{2l_\alpha^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\beta} dz + \frac{\Omega l_\beta^2}{6l_\alpha^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\alpha} dz
\end{aligned} \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned}
k_A^{33} = & \frac{3\Omega}{2l_\gamma^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\gamma\gamma} dz + \frac{\Omega}{2l_\beta^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\gamma} dz + \frac{\Omega l_\gamma^2}{6l_\beta^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\beta} dz \\
& + \frac{\Omega}{2l_\alpha^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\gamma} dz - \frac{\Omega l_\gamma^2}{6l_\alpha^2 l_\beta^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\beta} dz + \frac{\Omega l_\gamma^2}{6l_\alpha^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\alpha} dz
\end{aligned} \quad (4.136)$$

$$\begin{aligned}
k_A^{12} = & -\frac{\Omega l_\alpha l_\beta}{6l_\gamma^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\gamma\gamma} dz - \frac{\Omega l_\alpha}{6l_\beta l_\gamma^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\gamma} dz \\
& - \frac{\Omega l_\beta}{6l_\alpha l_\gamma^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\gamma} dz - \frac{5\Omega}{6l_\alpha l_\beta} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\beta} dz
\end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned}
k_A^{13} = & -\frac{\Omega l_\alpha}{6l_\beta^2 l_\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\gamma} dz - \frac{\Omega l_\alpha l_\gamma}{6l_\beta^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\beta} dz \\
& - \frac{5\Omega}{6l_\alpha l_\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\gamma} dz - \frac{\Omega l_\gamma}{6l_\alpha l_\beta^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\beta} dz
\end{aligned} \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned}
k_A^{23} = & -\frac{5\Omega}{6l_\beta l_\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\beta\gamma} dz - \frac{\Omega l_\beta}{6l_\alpha^2 l_\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\gamma} dz \\
& - \frac{\Omega l_\gamma}{6l_\alpha^2 l_\beta} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\beta} dz - \frac{\Omega l_\beta l_\gamma}{6l_\alpha^4} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{\alpha\alpha} dz
\end{aligned} \quad (4.139)$$

4.9.2 Μητρώο ακαμψίας λόγω αντισυμμετρικών διατμητικών μορφών k_A^s

Το μητρώο ακαμψίας k_A^s , λόγω αντισυμμετρικών διατμητικών μορφών, υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (4.60) ως εξής :

$$\begin{aligned}
k_1 &= \int_V [W_{\alpha\beta}^t G_S W_{\alpha\beta}] dV = \begin{bmatrix} k_1^{11} & k_1^{12} \\ k_1^{21} & k_1^{22} \end{bmatrix} \\
k_2 &= \int_V [W_{\beta\gamma}^t G_S W_{\beta\gamma}] dV = \begin{bmatrix} k_2^{11} & k_2^{12} \\ k_2^{21} & k_2^{22} \end{bmatrix} \\
k_3 &= \int_V [W_{\gamma\alpha}^t G_S W_{\gamma\alpha}] dV = \begin{bmatrix} k_3^{11} & k_3^{12} \\ k_3^{21} & k_3^{22} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Για να εξασφαλισθεί η συμμετρία, το εγκάρσιο διατμητικό μητρώο ορίζεται ως εξής :

$$k_A^s = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} k_1^{11} + k_3^{22} & k_1^{12} & k_3^{12} \\ k_1^{12} & k_2^{11} + k_1^{22} & k_2^{12} \\ k_3^{12} & k_2^{12} & k_3^{11} + k_2^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s^{11} & k_s^{12} & k_s^{13} \\ k_s^{21} & k_s^{22} & k_s^{23} \\ k_s^{31} & k_s^{32} & k_s^{33} \end{bmatrix} \tag{4.141}$$

Αναλυτικά οι όροι του αντισυμμετρικού διατμητικού μητρώου ακαμψίας είναι :

$$k_s^{11} = \frac{1}{12\Omega} l_\alpha^2 \left[\int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz (y_\gamma^2 + y_\beta^2) + \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz (x_\gamma^2 + x_\beta^2) - 2 \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz (x_\gamma y_\gamma + x_\beta y_\beta) \right] \tag{4.142}$$

$$k_s^{22} = \frac{1}{12\Omega} l_\beta^2 \left[\int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz (y_\alpha^2 + y_\gamma^2) + \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz (x_\alpha^2 + x_\gamma^2) - 2 \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz (x_\alpha y_\alpha + x_\gamma y_\gamma) \right] \tag{4.143}$$

$$k_s^{33} = \frac{1}{12\Omega} l_\gamma^2 \left[\int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz (y_\beta^2 + y_\alpha^2) + \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz (x_\beta^2 + x_\alpha^2) - 2 \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz (x_\beta y_\beta + x_\alpha y_\alpha) \right] \tag{4.144}$$

$$k_s^{12} = -\frac{1}{12\Omega} l_\alpha l_\beta \left[(y_\alpha y_\beta) \int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz + (x_\alpha x_\beta) \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz - (x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha) \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz \right] \tag{4.145}$$

$$k_s^{13} = -\frac{1}{12\Omega} l_\alpha l_\gamma \left[(y_\alpha y_\gamma) \int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz + (x_\alpha x_\gamma) \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz - (x_\alpha y_\gamma + x_\gamma y_\alpha) \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz \right] \tag{4.146}$$

$$k_s^{23} = -\frac{1}{12\Omega} l_\beta l_\gamma \left[(y_\alpha y_\gamma) \int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz + (x_\beta x_\gamma) \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz - (x_\beta y_\gamma + x_\gamma y_\beta) \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz \right] \quad (4.147)$$

όπου είναι :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} G_{xx} dz &= \sum_{k=1}^N G_{xx}^k (z_k - z_{k+1}) \\ \int_{-h/2}^{h/2} G_{yy} dz &= \sum_{k=1}^N G_{yy}^k (z_k - z_{k+1}) \\ \int_{-h/2}^{h/2} G_{xy} dz &= \sum_{k=1}^N G_{xy}^k (z_k - z_{k+1}) \end{aligned} \quad (4.148)$$

Για ένα ορθογώνιο ισόπλευρο τρίγωνο με $l_\alpha = l_\beta = l_\gamma = 1$ και με ισότροπο συντελεστή διατμήσεως G , πάχος h και εμβαδόν διατομής A , το μητρώο ακαμψίας k_A^s απλοποιείται στο εξής μητρώο :

$$k_A^s = \frac{Gh}{12A} \begin{bmatrix} 3 & . & \sqrt{2} \\ . & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

Έτσι η ενέργεια παραμόρφωσης λόγω διάτμησης γράφεται :

$$U = \gamma_s^t k_A^s \gamma_s \quad (4.150)$$

Όμως ισχύει ότι :

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \Psi_A^s \quad (4.151)$$

Έτσι η σχέση (4.150) γράφεται :

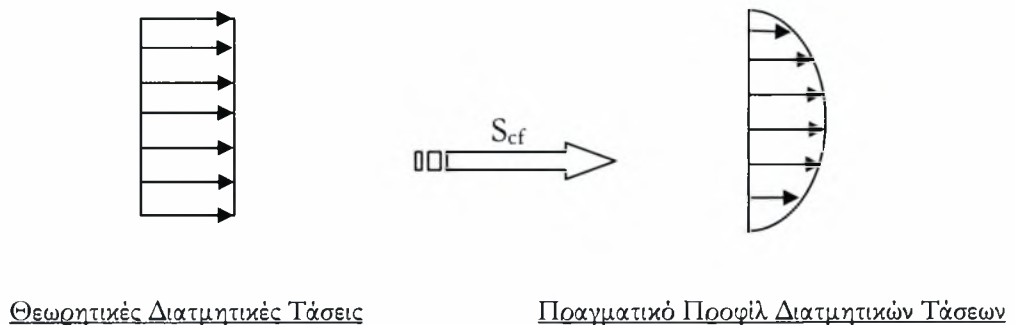
$$U = \frac{1}{2} \gamma_s^t k_A^s \gamma_s = \frac{1}{2} [\Psi_A^s]^t \frac{1}{4} k_A^s [\Psi_A^s] = \frac{1}{2} [\Psi_A^s]^t \bar{k}_A^s [\Psi_A^s] \quad (4.152)$$

Από την παραπάνω σχέση (4.152) αποκτούμε μία άλλη έκφραση του μητρώου k_A^s :

$$\bar{k}_A^s = \frac{1}{4} k_A^s = \begin{bmatrix} \bar{k}_s^{11} & \bar{k}_s^{12} & \bar{k}_s^{13} \\ \bar{k}_s^{21} & \bar{k}_s^{22} & \bar{k}_s^{23} \\ \bar{k}_s^{31} & \bar{k}_s^{32} & \bar{k}_s^{33} \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

4.9.3 Συντελεστής διατμητικής διόρθωσης S_{cf}

Οι διατμητικές τάσεις στην πάνω και κάτω πλευρά της επιφάνειας του στοιχείου πρέπει να μηδενίζονται. Η απαίτηση αυτή δεν ικανοποιείται σύμφωνα με την μεθοδολογία ανάπτυξης των παραπάνω σχέσεων. Για τον λόγο αυτό η διατμητική ακαμψία πρέπει να πολλαπλασιαστεί με ένα διορθωτικό συντελεστή. Αν με $G(z)$ συμβολίζουμε την πραγματική τιμή του μέτρου διατμήσεως, το οποίο είναι συνάρτηση της συντεταγμένης z κατά το πάχος του στοιχείου και με \bar{G} το μέτρο διατμήσεως με την παραδοχή της σταθερής εγκάρσιας παραμόρφωσης κατά το πάχος του στοιχείου, τότε :



Σχήμα 4.18 : Απεικόνιση του προφίλ των τάσεων με τον διορθωτικό συντελεστή διάτμησης S_{cf}

$$\bar{G} = S_{cf} G(z) \quad (4.154)$$

όπου S_{cf} είναι ο συντελεστής διατμητικής διόρθωσης. Η σχέση (4.154) ισχύει και για την διατμητική ενέργεια :

$$\bar{U}_s = S_{cf} U_s \quad (4.155)$$

Οι διατμητικές εγκάρσιες τάσεις σ_s στη θέση z δίνονται σύμφωνα με την κλασσική θεωρία δοκού από την πιο κάτω σχέση (4.156) :

$$\sigma_s = \frac{Q}{R} g(z) \quad (4.156)$$

όπου \mathbf{R} είναι η ροπή αδράνειας και $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ η στατική ροπή αδράνειας της διατομής α -ντίστοιχα και δίνονται για την φυσική διεύθυνση α από :

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\alpha\alpha} (z - z_{0\alpha})^2 dz \quad (4.157)$$

$$g(z) = - \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\alpha\alpha} (z - z_{0\alpha}) dz \quad (4.158)$$

Η εγκάρσια διατμητική ενέργεια γράφεται :

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_q^2}{G(z)} dz = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g^2(z)}{G(z)} dz \quad (4.159)$$

Η έκφραση της διατμητικής ενέργειας για σταθερή παραμόρφωση δίνεται από :

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\gamma} G(z) \bar{\gamma} dz \quad (4.160)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.161) η σχέση (4.160) γράφεται :

$$\bar{\gamma} = \frac{\sigma_s}{G} = \frac{Q}{h\bar{G}} \quad (4.161)$$

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{h^2 \bar{G}^2} \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz \quad (4.162)$$

Θέτοντας την σχέση (4.163) η σχέση (4.162) γράφεται :

$$h\bar{G} = \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz \quad (4.163)$$

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz} \quad (4.164)$$

Ο συντελεστής διατμητικής διόρθωσης δίνεται από την σχέση (4.165) :

$$S_{cf} = \frac{\bar{U}_s}{U_s} = \frac{R^2}{\int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g^2(z)}{G(z)} dz} \quad (4.165)$$

Για τον υπολογισμό των διορθωτικών διατμητικών συντελεστών πρέπει να οριστεί η συντεταγμένη z του ουδετέρου επιπέδου κατά μήκος των τριών διευθύνσεων α, β, γ . Οι συντεταγμένες αυτές δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις :

$$Z_{0\alpha} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z \kappa_{\alpha\alpha}^k dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\alpha\alpha}^k dz}, \quad Z_{0\beta} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z \kappa_{\beta\beta}^k dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\beta\beta}^k dz}, \quad Z_{0\gamma} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z \kappa_{\gamma\gamma}^k dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\gamma\gamma}^k dz} \quad (4.166)$$

Ο διατμητικός συντελεστής για τις πλευρές α, β, γ γράφεται :

$$\lambda_{\alpha} = \frac{\left[\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\alpha\alpha}^k (z - Z_{0\alpha})^2 dz \right]^2}{G_{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\int_{-h/2}^z \kappa_{\alpha\alpha}^k (z - Z_{0\alpha})^2 dz \right]^2}{G_{\alpha}^k} dz} \quad (4.167)$$

$$\lambda_{\beta} = \frac{\left[\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\beta\beta}^k (z - Z_{0\beta})^2 dz \right]^2}{G_{\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\int_{-h/2}^z \kappa_{\beta\beta}^k (z - Z_{0\beta})^2 dz \right]^2}{G_{\beta}^k} dz} \quad (4.168)$$

$$\lambda_{\gamma} = \frac{\left[\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{\gamma\gamma}^k (z - Z_{0\gamma})^2 dz \right]^2}{G_{\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\int_{-h/2}^z \kappa_{\gamma\gamma}^k (z - Z_{0\gamma})^2 dz \right]^2}{G_{\gamma}^k} dz} \quad (4.169)$$

όπου είναι :

$$G_i^k = \begin{bmatrix} c_{ix'} & s_{ix'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{xy} & G_{yy} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} c_{ix'} \\ s_{ix'} \end{bmatrix}, \quad i=\alpha, \beta, \gamma \quad (4.170)$$

και

$$G_i = \int_{-h/2}^{h/2} G_i^k dz = \sum_{k=1}^N G_i^k h_k, \quad i=\alpha, \beta, \gamma \quad (4.171)$$

Τελικά το νέο διορθωμένο διατμητικό αντισυμμετρικό μητρώο γράφεται :

$$k_A^s = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha k_s^{11} & \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta} k_s^{12} & \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\gamma} k_s^{13} \\ \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta} k_s^{21} & \lambda_\beta k_s^{22} & \sqrt{\lambda_\gamma \lambda_\beta} k_s^{23} \\ \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\gamma} k_s^{13} & \sqrt{\lambda_\gamma \lambda_\beta} k_s^{23} & \lambda_\gamma k_s^{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{k}_A^s = \frac{1}{4} k_A^s = \begin{bmatrix} \lambda_\alpha \bar{k}_s^{11} & \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta} \bar{k}_s^{12} & \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\gamma} \bar{k}_s^{13} \\ \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta} \bar{k}_s^{21} & \lambda_\beta \bar{k}_s^{22} & \sqrt{\lambda_\gamma \lambda_\beta} \bar{k}_s^{23} \\ \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\gamma} \bar{k}_s^{13} & \sqrt{\lambda_\gamma \lambda_\beta} \bar{k}_s^{23} & \lambda_\gamma \bar{k}_s^{33} \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

4.10 Αξιμούθιο μητρώο ακαμψίας

Οι αξιμούθιοι βαθμοί ελευθερίας δεν παίρνουν μέρος στον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου. Η ακαμψία που προσδίδεται στους βαθμούς αυτούς, είναι καθαρά για υπολογιστικούς λόγους (όταν όλα τα στοιχεία που συντρέχουν σε έναν κόμβο είναι συνεπίπεδα π.χ. πλάκες). Για τον υπολογισμό των όρων ακαμψίας λόγω των αξιμούθιων βαθμών ελευθερίας, θεωρείται ότι τρία στροφικά ελατήρια με την ίδια ακαμψία βρίσκονται στις τρεις κορυφές του τριγώνου και χρησιμοποιούνται για να προσομοιάσουν την περιστροφή εντός του επιπέδου γύρω από τον άξονα z. Οι αντίστοιχες φυσικές μορφές $\Psi_\alpha, \Psi_\beta, \Psi_\gamma$ είναι οι μοναδιαίες στροφές γύρω από τον άξονα z για κάθε μία από τις κορυφές του τριγώνου. Η ακαμψία των αξιμούθιων μορφών υπολογίζεται ως:

$$k_z = \begin{bmatrix} k_z^{\alpha\alpha} & k_z^{\alpha\beta} & k_z^{\alpha\gamma} \\ k_z^{\alpha\beta} & k_z^{\beta\beta} & k_z^{\beta\gamma} \\ k_z^{\alpha\gamma} & k_z^{\beta\gamma} & k_z^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} = k_{zz} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

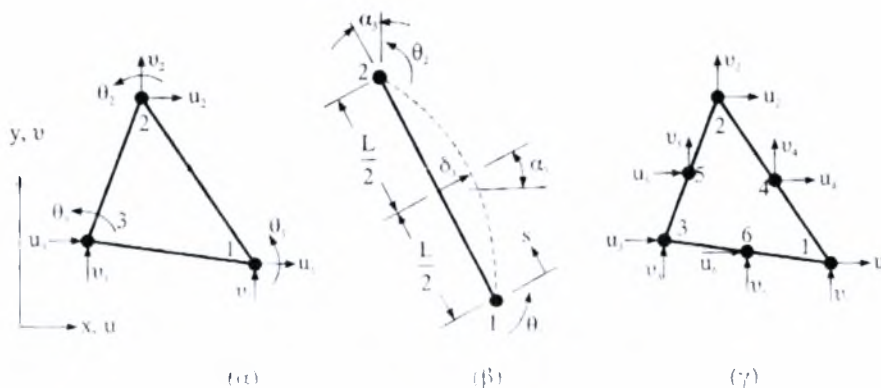
Η παράμετρος k_{zz} είναι αυθαίρετη, αλλά πολύ μικρή συγκρινόμενη με τους άλλους όρους ακαμψίας, έτσι ώστε να έχει αμελητέα συμμετοχή στην τελική διατύπωση των

εξισώσεων ισορροπίας. Μια εκτίμηση της παραμέτρου k_{zz} δίνεται από την σχέση (4.174):

$$k_{zz} = 10^{-6} \Omega \times \max \left\{ \frac{1}{I_a^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 k_{aa} dz, \frac{1}{I_b^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 k_{bb} dz, \frac{1}{I_\gamma^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 k_{\gamma\gamma} dz \right\} \quad (4.174)$$

όπου k_{aa} , k_{bb} , $k_{\gamma\gamma}$ είναι όροι καμπτικής ακαμψίας από το μητρώο $k_N(\gamma_i^0, \psi_s)$. Όπως έχει αναφερθεί, οι μορφές αυτές χρησιμοποιούνται για υπολογιστικούς λόγους και για αυτό δεν υπάρχουν όροι σύνδεσης με τις υπόλοιπες μορφές. Η μεταβολή του k_{zz} σε ένα πεδίο τιμών από 10^3 - 10^{-6} , τόσο σε γραμμική όσο και σε μη γραμμική στατική ανάλυση οδηγεί σε αποκλίσεις της τάξης του 1–3 % μεταξύ των αποτελεσμάτων. Όταν απαιτείται πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα, εφαρμόζεται η πρακτική της χρησιμοποίησης εγκάρσιων στρωφικών βαθμών ελευθερίας (drilling degrees of freedom) σύμφωνα με την μέθοδο κατά Allman η οποία περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τριγωνικό στοιχείο με εγκάρσιους στρωφικούς βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα 4.19 : (α) Τριγωνικό στοιχείο με εγκάρσιους βαθμούς ελευθερίας, (β) παραμόρφωση πλευράς 1-2 λόγω στροφών στα άκρα, (γ) τριγωνικό στοιχείο έξι κόμβων γραμμικής παραμόρφωσης

Προκειμένου να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου με εγκάρσιους στρωφικούς βαθμούς ελευθερίας, καταφεύγουμε στην παραδοχή ότι η παραμόρφωση των πλευρών του τριγώνου λόγω της ύπαρξης των στρωφικών βαθμών ελευθερίας

ας θ_1, θ_2 και θ_3 είναι παραβολική. Έτσι η κάθετη μετατόπιση δ στο μέσον της πλευράς $i-j$ του τριγώνου ισούται με:

$$\delta = \frac{L}{8} (\theta_j - \theta_i) \quad (4.175)$$

που σημαίνει ότι όταν $\theta_j = \theta_i$ η πλευρά παραμένει ευθεία. Όταν $\theta_i = -\theta_j$ τότε η μετατόπιση δ μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί στη βύθιση μιας αμφιερείστου δοκού μήκους L λόγω ακραίων ροπών που παράγουν στα άκρα τις στροφές $|\theta_j| = |\theta_i|$.

Οι συνιστώσες του δ στις διευθύνσεις x και y ισούνται με $\delta \cos \alpha$ και $\delta \sin \alpha$, αντίστοιχα. Κατά συνέπεια η συνολική μετατόπιση ενός σημείου της πλευράς $i-j$ του στοιχείου δίνεται από το άθροισμα της γραμμικής μετατόπισης λόγω u_i, u_j και της παραβολικής μετατοπίσεως λόγω θ_i, θ_j :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{L-s}{L} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + \frac{s}{L} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} + \frac{(L-s)s}{2L} (\theta_j - \theta_i) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.176)$$

Η σχέση αυτή αντιστοιχεί στη διατύπωση του πεδίου των μετατοπίσεων ραβδωτού στοιχείου τριών κόμβων. Ανάλογες σχέσεις μπορούν να γραφούν και για τις άλλες πλευρές του τριγώνου, από τις οποίες θα προέλθουν οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου.

Με τη χρήση των επιφανειακών συντεταγμένων (Παράρτημα Α) το πεδίο των μετατοπίσεων εκφράζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} u &= s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 u_3 + s_2 s_3 \delta_{1x} + s_1 s_3 \delta_{2x} + s_1 s_2 \delta_{3x} \\ v &= s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 + s_2 s_3 \delta_{1y} + s_1 s_3 \delta_{2y} + s_1 s_2 \delta_{3y} \end{aligned} \quad (4.177)$$

όπου δ_{3x}, δ_{3y} είναι οι κατά x και y συνιστώσες της κάθετης μετατόπισης του μέσου της πλευράς 1-2. Από τις σχέσεις (4.177), μετά την αντικατάσταση των σχέσεων:

$$\begin{bmatrix} \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \end{bmatrix} = \frac{L}{8} (\theta_2 - \theta_1) \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 \\ \sin \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

για την δ_3 και των αντίστοιχων σχέσεων για τις δ_1 και δ_2 προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος του τριγωνικού στοιχείου με εγκάρσιους στρωφικούς βαθμούς ελευθερίας.

Στις ίδιες συναρτήσεις σχήματος μπορούμε να καταλήξουμε από ένα στοιχείο γραμμικής παραμόρφωσης έξι κόμβων. Έτσι από τη σχέση (4.176) και για τον κόμβο 4 του στοιχείου του σχήματος 4.16γ, θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{8} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

αφού ισχύουν οι σχέσεις $L \cos \alpha = y_2 - y_1$, $L \sin \alpha = x_1 - x_2$ για την πλευρά 1-4-2. Αντίστοιχες εκφράσεις μπορούμε να διατυπώσουμε για τις μετατοπίσεις u_5, v_5 και u_6, v_6 .

Οι σχέσεις 4.179 σε μητρωική μορφή μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_5 v_5 & u_6 v_6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 v_1 \theta_1 & u_1 v_1 \theta_1 & u_1 v_1 \theta_1 \end{bmatrix}^T \quad (4.180)$$

$\begin{matrix} 12 \times 1 & & & & & & 12 \times 9 & & & & 9 \times 1 \end{matrix}$

η οποία μας οδηγεί στο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου με εγκάρσιους στρωφικούς βαθμούς ελευθερίας από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

$\begin{matrix} 9 \times 9 & & 9 \times 12 & & 12 \times 12 & & 12 \times 9 \end{matrix}$

όπου $[k']$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου γραμμικής παραμόρφωσης έξι κόμβων και $[T]$ είναι το μητρώο αλληλεξάρτησης των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου (α) και του στοιχείου (γ) του σχήματος 4.16 όπως προκύπτει από τη σχέση (4.179).

Στην ακραία περίπτωση κατά την οποία όλες οι στρώφες των κόμβων ενός δικτύου πεπερασμένων στοιχείων με εγκάρσιους βαθμούς ελευθερίας είναι ίσες, τότε η παραμόρφωση του φορέα μηδενίζεται. Για την αποφυγή της δημιουργίας αυτού του μηχανισμού αρκεί να τεθεί σε ένα μόνο κόμβο του δικτύου ο περιορισμός $\theta_{zi} = 0$.

Συνεπώς λαμβάνοντας υπόψιν μας όλους τους παραπάνω όρους δυσκαμψίας, λόγω αξονικής και συμμετρικά καμπτικής παραμόρφωσης, λόγω αντισυμμετρικής κάμψης

και διάτμησης αλλά και λόγω αζιμούθιων στροφών προκύπτει το παρακάτω φυσικό μη-τρώο δυσκαμψίας:

$$\begin{array}{c}
 k_N = \Omega \\
 12 \times 12
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\beta} & k_{\alpha\gamma} & \frac{z}{l_\alpha} k_{\alpha\alpha} & \cdot & \frac{z}{l_\beta} k_{\alpha\beta} & \cdot & \frac{z}{l_\gamma} k_{\alpha\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & k_{\beta\beta} & k_{\beta\gamma} & \frac{z}{l_\alpha} k_{\alpha\beta} & \cdot & \frac{z}{l_\beta} k_{\beta\beta} & \cdot & \frac{z}{l_\gamma} k_{\beta\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & k_{\gamma\gamma} & \frac{z}{l_\alpha} k_{\alpha\gamma} & \cdot & \frac{z}{l_\beta} k_{\beta\gamma} & \cdot & \frac{z}{l_\gamma} k_{\gamma\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \frac{z^2}{l_\alpha^2} k_{\alpha\alpha} & \cdot & \frac{z^2}{l_\alpha l_\beta} k_{\alpha\beta} & \cdot & \frac{z^2}{l_\alpha l_\gamma} k_{\alpha\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & k_{\alpha\alpha}^A & \cdot & k_{\alpha\beta}^A & \cdot & k_{\alpha\gamma}^A & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \frac{z^2}{l_\beta^2} k_{\beta\beta} & \cdot & \frac{z^2}{l_\beta l_\gamma} k_{\beta\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & k_{\beta\beta}^A & \cdot & k_{\beta\gamma}^A & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & \frac{z^2}{l_\gamma^2} k_{\gamma\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & k_{\gamma\gamma}^A & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & & k_{\alpha\alpha}^z & k_{\alpha\beta}^z & k_{\alpha\gamma}^z \\
 & & & & & & & & & & k_{\beta\beta}^z & k_{\beta\gamma}^z \\
 & & & & & & & & & & & k_{\gamma\gamma}^z
 \end{array}
 \quad (4.182)$$

και

$$\begin{array}{c}
 k_N = \Omega \\
 12 \times 12
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 k_{\alpha\alpha} & k_{\alpha\beta} & k_{\alpha\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & k_{\beta\beta} & k_{\beta\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & k_{\gamma\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \frac{z^2}{l_\alpha^2} k_{\alpha\alpha} & \cdot & \frac{z^2}{l_\alpha l_\beta} k_{\alpha\beta} & \cdot & \frac{z^2}{l_\alpha l_\gamma} k_{\alpha\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & k_{\alpha\alpha}^A & \cdot & k_{\alpha\beta}^A & \cdot & k_{\alpha\gamma}^A & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \frac{z^2}{l_\beta^2} k_{\beta\beta} & \cdot & \frac{z^2}{l_\beta l_\gamma} k_{\beta\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & k_{\beta\beta}^A & \cdot & k_{\beta\gamma}^A & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & \frac{z^2}{l_\gamma^2} k_{\gamma\gamma} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & k_{\gamma\gamma}^A & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & & k_{\alpha\alpha}^z & k_{\alpha\beta}^z & k_{\alpha\gamma}^z \\
 & & & & & & & & & & k_{\beta\beta}^z & k_{\beta\gamma}^z \\
 & & & & & & & & & & & k_{\gamma\gamma}^z
 \end{array}
 \quad (4.183)$$

Το παραπάνω μητρώο δυσκαμψίας (σχέση 4.183) μορφώθηκε για ένα ισότροπο στοιχείο ή ένα συμμετρικό σύνθετο πολύστρωτο στοιχείο του οποίου οι συζευγμένοι όροι αξονικής και καμπτικής έντασης μηδενίζονται και έτσι το συνολικό μητρώο ακαμψίας διαθέτει λιγότερους όρους από το πλήρες φυσικό μητρώο δυσκαμψίας (σχέση 4.182).

4.11 Τοπικό και καθολικό καρτεσιανό μητρώο ακαμψίας

Η μέθοδος των φυσικών μορφών έχει διατυπωθεί στις προηγούμενες παραγράφους. Το επόμενο βήμα είναι η μετασχηματισθεί το φυσικό μητρώο ακαμψίας στο τοπικό και το καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Το φυσικό μητρώο ακαμψίας φαίνεται στην σχέση (4.182) και αποτελείται στην γενική περίπτωση από 33 μη μηδενικούς όρους (λόγω συμμετρικού μητρώου). Στην ειδική περίπτωση που η διαστρωμάτωση του υλικού είναι συμμετρική, οι όροι σύζευξης αξονικών μορφών και συμμετρικών καμπτικών μορφών μηδενίζονται και ο αριθμός των μη μηδενικών όρων μειώνεται σε 24 από σχέση (4.183). Το καρτεσιανό μητρώο ακαμψίας \mathbf{k}' στο τοπικό σύστημα υπολογίζεται μέσω του πιο κάτω απλού μετασχηματισμού :

$$\mathbf{k}' = \bar{\mathbf{a}}_N^t \underbrace{\left[\int_V \mathbf{a}_N^t \mathbf{\kappa}_{cl} \mathbf{a}_N dV \right]}_{\substack{\text{φυσικό μητρώο ακαμψίας} \\ \text{τοπικό μητρώο ακαμψίας}}} \bar{\mathbf{a}}_N \quad (4.184)$$

όπου $\bar{\mathbf{a}}_N$ είναι το μητρώο το οποίο συσχετίζει τις φυσικές παραμορφωσιακές μορφές ρ_N με τις καρτεσιανές επικόμβιες τοπικές μετακινήσεις ρ' .

Το μητρώο $\bar{\mathbf{a}}_N$ περιέχει μόνο γεωμετρικούς όρους και υπολογίζεται αναλυτικά, προβάλλοντας τους τοπικούς καρτεσιανούς βαθμούς ελευθερίας στις φυσικές διευθύνσεις, δηλαδή στις πλευρές του τριγώνου. Για την πλευρά α του τριγώνου, η μετακίνηση ενός κόμβου της πλευράς ($j = 2,3$), συναρτήσει των τοπικών βαθμών ελευθερίας είναι :

$$\mathbf{u}_{aj} = \mathbf{u}_{aj} \cos \alpha + \mathbf{v}_{aj} \sin \alpha \quad (4.185)$$

Οι αξονικές παραμορφώσεις της πλευράς α είναι

$$(u_{a3} - u_{a2})/l_a \quad (4.186)$$

η οποία όμως πρέπει να ισούται με την αντίστοιχη παραμόρφωση γ_{α} στο φυσικό σύστημα. Άρα έχουμε :

$$\gamma_{\alpha} = \frac{x_a}{l_a^2} (u_3' - u_2') + \frac{y_a}{l_a^2} (v_3' - v_2') \quad (4.187)$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και οι σχέσεις των φυσικών παραμορφώσεων γ_{β} και γ_{γ} με τους καρτεσιανούς τοπικούς βαθμούς ελευθερίας.

$$\gamma_{\beta} = \frac{x_{\beta}}{l_{\beta}^2} (u_1' - u_3') + \frac{y_{\beta}}{l_{\beta}^2} (v_1' - v_3') \quad (4.188)$$

$$\gamma_{\gamma} = \frac{x_{\gamma}}{l_{\gamma}^2} (u_2' - u_1') + \frac{y_{\gamma}}{l_{\gamma}^2} (v_2' - v_1') \quad (4.189)$$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και για τις μορφές συμμετρικής και αντισυμμετρικής κάμψης. Επειδή οι μορφές αυτές περιλαμβάνουν μόνο δύο παραμορφώσεις, αφαιρείται από τις ολικές καρτεσιανές στρώφες το τμήμα της στρώφης στερεού σώματος.

Η στρώφη κατά την διεύθυνση α, στους κόμβους 2,3 είναι :

$$\varphi_{a2} = \theta_2' \sin \alpha + \varphi_2' \cos \alpha - (w_3 - w_2)/l_a \quad (4.190)$$

$$\varphi_{a3} = \theta_3' \sin \alpha + \varphi_3' \cos \alpha - (w_3 - w_2)/l_a \quad (4.191)$$

Αντίστοιχα οι στρώφες στο φυσικό σύστημα είναι :

$$\begin{aligned} \varphi_{a2} &= \frac{1}{2} \psi_{Sa} + \frac{1}{2} \psi_{La} \\ \varphi_{a3} &= \frac{1}{2} \psi_{Sa} + \frac{1}{2} \psi_{La} \end{aligned} \quad (4.192)$$

Από την επίλυση του συστήματος των σχέσεων (4.190)-(4.192) και από τις σχέσεις (4.56) αντίστοιχα για κάθε πλευρά είναι :

$$\begin{aligned}
 \psi_{s\alpha} &= \frac{x_\alpha}{l_\alpha} (\theta_2' - \theta_3') + \frac{y_\alpha}{l_\alpha^2} (\varphi_2' - \varphi_3') \\
 \psi_{s\beta} &= \frac{x_\beta}{l_\beta} (\theta_3' - \theta_1') + \frac{y_\beta}{l_\beta^2} (\varphi_1' - \varphi_3') \\
 \psi_{s\gamma} &= \frac{x_\gamma}{l_\gamma} (\theta_1' - \theta_2') + \frac{y_\gamma}{l_\gamma^2} (\varphi_1' - \varphi_2')
 \end{aligned} \tag{4.193}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{\Lambda\alpha} &= \frac{x_\alpha}{l_\alpha} (\theta_2' + \theta_3') + \frac{y_\alpha}{l_\alpha^2} (\varphi_2' + \varphi_3') - \frac{2(w_3' - w_2')}{l_\alpha} \\
 \psi_{s\beta} &= \frac{x_\beta}{l_\beta} (\theta_3' + \theta_1') + \frac{y_\beta}{l_\beta^2} (\varphi_3' + \varphi_1') - \frac{2(w_1' - w_3')}{l_\beta} \\
 \psi_{s\gamma} &= \frac{x_\gamma}{l_\gamma} (\theta_1' + \theta_2') + \frac{y_\gamma}{l_\gamma^2} (\varphi_1' + \varphi_2') - \frac{2(w_2' - w_1')}{l_\gamma}
 \end{aligned} \tag{4.194}$$

Για τις μορφές των αζιμούθιων στρωφών ισχύει :

$$\begin{aligned}
 \Psi_\alpha &= \psi_1 - \rho_{06} \\
 \Psi_\beta &= \psi_2 - \rho_{06} \\
 \Psi_\gamma &= \psi_3 - \rho_{06}
 \end{aligned} \tag{4.195}$$

$$\text{όπου } \rho_{06} = \frac{1}{4\Omega} (x_\alpha u_1' + y_\alpha v_1' + x_\beta u_2' + y_\beta v_2' + x_\gamma u_3' + y_\gamma v_3')$$

Με βάση τις πιο πάνω σχέσεις, το μητρώο $\bar{\alpha}_N$, το οποίο αποτελεί ουσιαστικά το μητρώο σύζευξης των τοπικών και φυσικών μετακινήσεων, γράφεται :

$$\bar{\alpha}_N = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_N^{11} & \bar{\alpha}_N^{12} & \bar{\alpha}_N^{13} \\ \bar{\alpha}_N^{21} & \bar{\alpha}_N^{22} & \bar{\alpha}_N^{23} \end{bmatrix} \tag{4.196}$$

(12x18) (6x6) (6x6) (6x6) (6x6) (6x6)

$$\begin{aligned}
 \rho_N = \bar{\alpha}_N \rho' \Rightarrow \\
 \begin{matrix} (12 \times 1) & 12 \times 18 & 18 \times 1 \end{matrix} & \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma_{ta} \\ \gamma_{t\beta} \\ \gamma_{t\gamma} \\ \psi_{S\alpha} \\ \psi_{S\beta} \\ \psi_{S\gamma} \\ \psi_{A\alpha} \\ \psi_{A\beta} \\ \psi_{A\gamma} \\ \psi_{\alpha} \\ \psi_{\beta} \\ \psi_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_N^{11} & \bar{\alpha}_N^{12} & \bar{\alpha}_N^{13} \\ \bar{\alpha}_N^{21} & \bar{\alpha}_N^{22} & \bar{\alpha}_N^{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \\ \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \\ \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \varphi'_3 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.197}$$

όπου είναι αντίστοιχα :

$$\bar{\alpha}_N^{11} = \begin{bmatrix} \cdot & -\frac{x_{\alpha}}{l_{\alpha}^2} & \frac{x_{\alpha}}{l_{\alpha}^2} & \cdot & -\frac{y_{\alpha}}{l_{\alpha}^2} & \frac{y_{\alpha}}{l_{\alpha}^2} \\ \frac{x_{\beta}}{l_{\beta}^2} & \cdot & -\frac{x_{\beta}}{l_{\beta}^2} & \frac{y_{\beta}}{l_{\beta}^2} & \cdot & -\frac{y_{\beta}}{l_{\beta}^2} \\ -\frac{x_{\gamma}}{l_{\gamma}^2} & \frac{x_{\gamma}}{l_{\gamma}^2} & \cdot & -\frac{y_{\gamma}}{l_{\gamma}^2} & \frac{y_{\gamma}}{l_{\gamma}^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}
 \tag{4.198}$$

$$\bar{\alpha}_N^{12} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{x_\alpha}{l_\alpha} & -\frac{x_\alpha}{l_\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{x_\beta}{l_\beta} & \cdot & \frac{x_\beta}{l_\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{x_\gamma}{l_\gamma} & -\frac{x_\gamma}{l_\gamma} & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.199)$$

$$\bar{\alpha}_N^{13} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{y_\alpha}{l_\alpha^2} & -\frac{y_\alpha}{l_\alpha^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_\beta}{l_\beta^2} & \cdot & -\frac{y_\beta}{l_\beta^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_\gamma}{l_\gamma^2} & -\frac{y_\gamma}{l_\gamma^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

$$\bar{\alpha}_N^{21} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{x_\alpha}{4\Omega} & -\frac{x_\beta}{4\Omega} & -\frac{x_\gamma}{4\Omega} & -\frac{y_\alpha}{4\Omega} & -\frac{y_\beta}{4\Omega} & -\frac{y_\gamma}{4\Omega} \\ -\frac{x_\alpha}{4\Omega} & -\frac{x_\beta}{4\Omega} & -\frac{x_\gamma}{4\Omega} & -\frac{y_\alpha}{4\Omega} & -\frac{y_\beta}{4\Omega} & -\frac{y_\gamma}{4\Omega} \\ -\frac{x_\alpha}{4\Omega} & -\frac{x_\beta}{4\Omega} & -\frac{x_\gamma}{4\Omega} & -\frac{y_\alpha}{4\Omega} & -\frac{y_\beta}{4\Omega} & -\frac{y_\gamma}{4\Omega} \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{N}}^{22} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{2}{l_a} & -\frac{2}{l_a} & \cdot & \frac{x_a}{l_a} & \frac{x_a}{l_a} \\ -\frac{2}{l_\beta} & \cdot & \frac{2}{l_\beta} & \frac{x_\beta}{l_\beta} & \cdot & \frac{x_\beta}{l_\beta} \\ \frac{2}{l_\gamma} & -\frac{2}{l_\gamma} & \cdot & \frac{x_\gamma}{l_\gamma} & \frac{x_\gamma}{l_\gamma} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.202)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{N}}^{23} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{y_a}{l_a^2} & \frac{y_a}{l_a^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_\beta}{l_\beta^2} & \cdot & \frac{y_\beta}{l_\beta^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_\gamma}{l_\gamma^2} & \frac{y_\gamma}{l_\gamma^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (4.203)$$

Στην επόμενη σελίδα απεικονίζεται το πλήρες μητρώο $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{N}}$ διαστάσεων 18x18:

Στην συνέχεια, ένας τελικός μετασχηματισμός οδηγεί στο καθολικό μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \underbrace{\left[\mathbf{T}_{06}^t \left[\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_N^t & \underbrace{\mathbf{k}_N}_{12 \times 12} & \bar{\alpha}_N \end{bmatrix}}_{18 \times 18} \right] \mathbf{T}_{06} \right]}_{18 \times 18} \quad (4.204)$$

όπου το μητρώο \mathbf{T}_{06} είναι ένα 18×18 υπερδιαγώνιο μητρώο της μορφής:

$$\mathbf{T}_{06} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & . & . & . & . & . \\ . & \mathbf{T}_0 & . & . & . & . \\ . & . & \mathbf{T}_0 & . & . & . \\ . & . & . & \mathbf{T}_0 & . & . \\ . & . & . & . & \mathbf{T}_0 & . \\ . & . & . & . & . & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

και \mathbf{T}_0 είναι το γνωστό μητρώο μετασχηματισμού 3×3 , με τα συνημίτονα κατευθύνσεως μεταξύ των τοπικών και των καθολικών αξόνων.

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xz} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zx} & c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.206)$$

Η σύνθεση του συνολικού μητρώου ακαμψίας του φορέα γίνεται στο καθολικό σύστημα.

4.12 Υπολογισμός τάσεων και εντατικών μεγεθών

4.12.1 Υπολογισμός εντατικών μεγεθών

Μετά την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας στο καθολικό σύστημα και τον υπολογισμό των αγνώστων μετατοπίσεων \mathbf{q} , επιστρέφουμε στο φυσικό σύστημα για να υπολογίσουμε τις φυσικές μορφές παραμόρφωσης και τις φυσικές δυνάμεις, μέσω των σχέσεων:

$$\rho_N = \bar{\alpha}_N \mathbf{T}_{06} \rho \quad , \quad \mathbf{P} = \mathbf{k}_n \rho_n \quad (4.207)$$

Επίσης οι εσωτερικές φυσικές δυνάμεις και ροπές μπορούν να υπολογιστούν στο κέντρο του στοιχείου ως :

$$\begin{aligned} F_N &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_c dz = \left[\int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{ct} dz \right] \gamma_t^0 + \left[\int_{-h/2}^{h/2} z \kappa_{ct} dz \right] \Gamma^I \psi_s \\ M_N &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_c dz = \left[\int_{-h/2}^{h/2} z \kappa_{ct} dz \right] \gamma_t^0 + \left[\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \kappa_{ct} dz \right] \Gamma^I \psi_s \\ Q_N &= \frac{2M_A}{l_i}, \quad M_A = \begin{bmatrix} M_{A\alpha} & M_{A\beta} & M_{A\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.208)$$

Η εγκάρσια διατμητική δύναμη ανά μονάδα μήκους δίνεται από :

$$q_s = \frac{2M_A}{\Omega} \quad (4.209)$$

Οι τοπικές καρτεσιανές δυνάμεις και ροπές αναφέρονται στους τρεις κόμβους του τριγώνου. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με προβολή και στην συνέχεια επαλληλία των φυσικών αξονικών δυνάμεων καθώς και των συμμετρικών και αντισυμμετρικών ροπών, σε ένα σύστημα παράλληλο προς το τοπικό, σε κάθε κόμβο του τριγώνου. Ο μετασχηματισμός στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων γίνεται μέσω της σχέσης (4.66) και πιο συγκεκριμένα :

$$\begin{Bmatrix} P_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & . \\ . & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_N \\ M_S \end{Bmatrix} \quad (4.210)$$

$$Q_C = \begin{bmatrix} c_{ax'} & c_{\beta x'} & c_{\gamma x'} \\ c_{ay'} & c_{\beta y'} & c_{\gamma y'} \end{bmatrix} Q_N$$

4.12.2 Υπολογισμός τάσεων κατά το πάχος του στοιχείου

Το διάνυσμα των φυσικών τάσεων για κάθε στρώση k δίνεται από την σχέση :

$$\sigma_c^k = \kappa_{ct}^k \gamma_t^k \quad (4.211)$$

ενώ το φυσικό διάνυσμα μετασχηματίζεται στο τοπικό μέσω της σχέσης:

$$\sigma_k^I = B \sigma_c^k \quad (4.212)$$

όπου όλα τα διανύσματα και τα μητρώα έχουν ορισθεί σε προηγούμενες παραγράφους. Για να υπολογίσουμε τις κατά το πάχος του στοιχείου, εγκάρσιες διατμητικές τάσεις χρησιμοποιούμε την ισορροπία τάσεων σε κάθε μία από τις φυσικές διευθύνσεις. Η εξίσωση ισορροπίας στην πλευρά α του στοιχείου γράφεται :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial z} = 0 \quad (4.213)$$

όπου $\sigma_{\alpha\alpha}$ είναι η τάση λόγω αντισυμμετρικής καμπτικής μορφής $M_{\alpha\alpha}^b$ και $\sigma_{\alpha\alpha}$ είναι η διατμητική τάση λόγω αντισυμμετρικής διατμητικής μορφής $M_{\alpha\alpha}^s$. Η σχέση (4.213) οδηγεί

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = -\int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} dz + c_1 \quad (4.214)$$

Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά α του τριγώνου είναι **μία φανταστική δοκός**, τότε από την θεωρία δοκού έχουμε :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{z}{I_{\alpha}} = \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^{\alpha} (z-z_{0\alpha})^2 dz} (z-z_{0\alpha}) \quad (4.215)$$

όπου $z_{0\alpha}$ είναι η συντεταγμένη του ουδέτερου άξονα της πλευράς α από την σχέση (4.166) και k_{NB}^{α} είναι η καμπτική ακαμψία στην πλευρά αυτή. Με τον συνδυασμό των δύο αυτών σχέσεων καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση (4.216) :

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \int_{-h/2}^z \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^{\alpha} (z-z_{0\alpha})^2 dz} (z-z_{0\alpha}) dz + c_1 \quad (4.216)$$

$$q_{\alpha\alpha} = \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{2M_{\alpha\alpha}}{\Omega} \quad (4.217)$$

η σχέση (4.216) γράφεται :

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \int_{-h/2}^z q_{\alpha\alpha} \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^{\alpha} (z-z_{0\alpha})^2 dz} (z-z_{0\alpha}) dz + c_1 \quad (4.218)$$

$$\sigma_{s\beta} = \int_{-h/2}^z q_{s\beta} \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^a (z-z_{0\beta})^2 dz} (z-z_{0\beta}) dz + c_1 \quad (4.219)$$

$$\sigma_{s\gamma} = \int_{-h/2}^z q_{s\beta} \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^a (z-z_{0\gamma})^2 dz} (z-z_{0\gamma}) dz + c_1 \quad (4.220)$$

Η εγκάρσια διατμητική ακαμψία μηδενίζεται στην πάνω και κάτω επιφάνεια του στοιχείου, με αποτέλεσμα η μεταβλητή c_1 επίσης να μηδενίζεται. Οι όροι k_{NB}^i για τις τρεις πλευρές του τριγώνου, ορίζονται από την **physical lumping method** ως ακολούθως

$$\begin{aligned} k_{NB}^a &= \max \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & +K_{\alpha\beta} & +K_{\alpha\gamma} \\ K_{\alpha\alpha} & -K_{\alpha\beta} & -K_{\alpha\gamma} \\ K_{\alpha\alpha} & -K_{\alpha\beta} & +K_{\alpha\gamma} \\ K_{\alpha\alpha} & +K_{\alpha\beta} & -K_{\alpha\gamma} \end{bmatrix} \\ k_{NB}^\beta &= \max \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta} & +K_{\beta\beta} & +K_{\beta\gamma} \\ -K_{\alpha\beta} & +K_{\beta\beta} & -K_{\beta\gamma} \\ -K_{\alpha\beta} & +K_{\beta\beta} & +K_{\beta\gamma} \\ K_{\alpha\beta} & +K_{\beta\beta} & -K_{\beta\gamma} \end{bmatrix} \\ k_{NB}^\gamma &= \max \begin{bmatrix} K_{\alpha\gamma} & +K_{\beta\gamma} & +K_{\gamma\gamma} \\ -K_{\alpha\gamma} & -K_{\beta\gamma} & +K_{\gamma\gamma} \\ -K_{\alpha\gamma} & +K_{\beta\gamma} & +K_{\gamma\gamma} \\ K_{\alpha\gamma} & -K_{\beta\gamma} & +K_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.221)$$

Η σχέση (4.218) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις εγκάρσιες διατμητικές τάσεις κατά το πάχος του στοιχείου στις τρεις φυσικές διευθύνσεις. Στη συνέχεια οι τάσεις μετασχηματίζονται στο τοπικό σύστημα (αναφερόμενες πάντα στο κέντρο βάρους του στοιχείου) χρησιμοποιώντας την σχέση (4.66). Για την ανάλυση κατασκευών από σύνθετα υλικά, υπολογίζεται η κατακόρυφη τάση σ_z , η οποία είναι υπεύθυνη για την έναρξη αστοχίας, όπως για παράδειγμα την αποκόλληση των στρώσεων (delamination).

Για να υπολογίσουμε τις κατακόρυφες τάσεις σ_{zz} χρησιμοποιούμε την ισορροπία τάσεων σε κάθε μία από τις φυσικές διευθύνσεις. Η εξίσωση ισορροπίας στην πλευρά α του στοιχείου γράφεται :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (4.222)$$

όπου $\sigma_{\alpha\alpha}$ είναι η διατμητική τάση λόγω αντισυμμετρικής διατμητικής μορφής. Από την σχέση (4.218) έχουμε :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}}, \quad \sigma_{zz} = -\int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} dz + c_1 z + c_2 \quad (4.223)$$

Με τον συνδυασμό των σχέσεων (4.222) και (4.223) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση (4.224).

$$\sigma_{zz} = \int_{-h/2}^z \int_{-h/2}^z \frac{\partial q_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^{\alpha} (z-z_{0\alpha})^2 dz} (z-z_{0\alpha}) dz + c_1 z + c_2 \quad (4.224)$$

Ο όρος $\frac{\partial q_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$ είναι η πίεση που ασκείται στην πάνω επιφάνεια του στοιχείου.

$$p = -\frac{\partial q_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \quad (4.225)$$

Από τις σχέσεις (4.224) και (4.225) έχουμε :

$$\sigma_{zz} = \int_{-h/2}^z \int_{-h/2}^z p \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^{\alpha} (z-z_{0\alpha})^2 dz} (z-z_{0\alpha}) dz + c_1 z + c_2 \quad (4.226)$$

Οι δύο σταθερές υπολογίζονται από τις φυσικές συνοριακές συνθήκες στην πάνω και κάτω επιφάνεια του στοιχείου

$$z = -\frac{h}{2} \rightarrow \sigma_{zz} = 0 \quad \& \quad z = +\frac{h}{2} \rightarrow \sigma_{zz} = -p \quad (4.227)$$

Η τελική έκφραση της κατακόρυφης τάσης είναι :

$$\sigma_{zz} = \int_{-h/2}^z \int_{-h/2}^z p \frac{k_{NB}(z)}{\int_{-h/2}^z k_{NB}^a (z-z_{0a})^2 dz} (z-z_{0a}) dz - \frac{p}{h} z - \frac{p}{2} \quad (4.228)$$

Είναι επίσης δυνατόν να ορισθεί η μέση τάση ως εξής:

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{1}{3} (\sigma_{zz}^a + \sigma_{zz}^b + \sigma_{zz}^c) \quad (4.229)$$

4.13 Κινηματικά ισοδύναμα επικόμβια φορτία

Αν στην κατασκευή επιβάλλονται κατανεμημένα επιφανειακά φορτία, όπως για παράδειγμα ομοιόμορφη πίεση ή ημιτονοειδή φορτία, τότε τα κινηματικώς ισοδύναμα επικόμβια φορτία είναι απαραίτητο να υπολογιστούν. Σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων έχουμε :

$$\delta U = \delta V \quad (4.230)$$

όπου δV είναι η μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων και δίνεται από :

$$\delta V = \int_V P' \delta u \, dV + F'_i \delta r_i + M'_i \delta \theta_i \quad (4.231)$$

όπου \mathbf{P} είναι τα επιβαλλόμενα κατανεμημένα επιφανειακά φορτία και \mathbf{F}, \mathbf{M} είναι οι επιβαλλόμενες επικόμβιες δυνάμεις και ροπές, αντίστοιχα. Σε ένα σημείο, εντός του τριγώνου, η μετατόπιση \mathbf{u} υπολογίζεται με παρεμβολή των τιμών της μετατόπισης στους κόμβους από την σχέση :

$$\mathbf{u} = \zeta_i \mathbf{u}_i, \quad i=1,2,3 \quad (4.232)$$

Γράφοντας την πιο πάνω σχέση μητρωικά, έχουμε :

$$\underset{(6 \times 1)}{\mathbf{u}} = \underset{(6 \times 18)}{\boldsymbol{\omega}} \underset{(18 \times 1)}{\boldsymbol{\rho}}, \quad \delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \delta \boldsymbol{\rho} \quad (4.233)$$

Το μητρώο $\underset{(6 \times 18)}{\boldsymbol{\omega}}$ δίνεται από την σχέση:

$$\underset{(6 \times 18)}{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \zeta_\alpha \mathbf{I}_6 & \zeta_\beta \mathbf{I}_6 & \zeta_\gamma \mathbf{I}_6 \end{bmatrix} \quad (4.234)$$

στην οποία \mathbf{I}_6 είναι το διαγώνιο μητρώο 6×6 :

$$I_6 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.235)$$

Η ίδια σχέση ισχύει και για την παρεμβολή των κατανεμημένων φορτίων :

$$\underset{(6 \times 1)}{P} = \underset{(6 \times 18)}{\omega} \underset{(18 \times 1)}{P_{SI}} \quad (4.236)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.231) στη σχέση (4.236) έχουμε :

$$\delta V = P_{SI}^t \left[\int_S \omega^t \omega \, dS \right] \delta p + F_i^t \delta r_i + M_i^t \delta \theta_i \quad (4.237)$$

Από την οποία προκύπτουν τα κινηματικά ισοδύναμα επικόμβια φορτία στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα

$$\underset{(1 \times 18)}{P'} = P_{SI}^t \int_S \omega^t \omega \, dS + F_i^t + M_i^t \quad (4.238)$$

Το ολοκλήρωμα λύνεται αναλυτικά και οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση :

$$\underset{(1 \times 18)}{P'} = P_{SI}^t \frac{\Omega}{12} \begin{bmatrix} 2I_6 & I_6 & I_6 \\ I_6 & 2I_6 & I_6 \\ I_6 & I_6 & 2I_6 \end{bmatrix} + F_i^t + M_i^t \quad (4.239)$$

Στη συνέχεια το διάνυσμα αυτό μετασχηματίζεται στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα.

$$R = T_{06}^t P' \quad (4.240)$$

Στο σύστημα αυτό γίνεται και η μόρφωση του συνολικού επιβαλλόμενου διανύσματος φόρτισης **R**. Έτσι μορφώνοντας το καθολικό μητρώο ακαμψίας και το αντίστοιχο διάνυσμα φόρτισης από την μητρωική εξίσωση

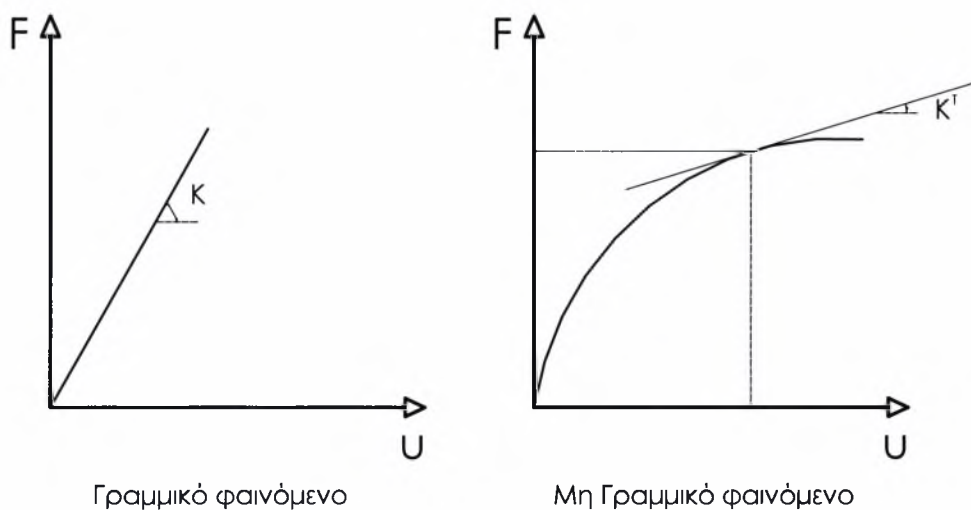
$$K r = R \quad (4.241)$$

υπολογίζουμε τις αντίστοιχες καθολικές επικόμβιες μετατοπίσεις **r**.

5 Εισαγωγή στην μη γραμμική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

5.1 Αναγκαιότητα και ιδιαιτερότητες της μη γραμμικής ανάλυσης

Παρά το γεγονός ότι η γραμμική ανάλυση προσφέρει στον μηχανικό μία γρήγορη εκτίμηση της συμπεριφοράς του φορέα και τον οδηγεί σε μία οικονομική αναζήτηση ενός βελτιωμένου σχεδιασμού, εν τούτοις υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μη γραμμική συμπεριφορά πρέπει να ληφθεί υπόψη προκειμένου να προλεχθεί ικανοποιητικά η συμπεριφορά της κατασκευής.



Σχήμα 5.0 Γραμμικός και μη γραμμικός νόμος παραμόρφωσης

Η θέσπιση από τους κανονισμούς οριακών μεθόδων σχεδιασμού καθιστά απαραίτητη, σε μη συμβατικές κυρίως κατασκευές, την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κατασκευής μέχρι της καταρρεύσεώς της και την ανίχνευση των μηχανισμών ανακατανομής της έντασης κατά τη διάρκεια της φόρτισης. Αλλά και σε περιπτώσεις υπάρχουσων κατασκευών, των οποίων η στατική-δυναμική επάρκεια για κάποιο λόγο

αμφισβητείται (βλάβες κατά τη διάρκεια της ζωής της κατασκευής ή φορτία τα οποία δεν είχαν ληφθεί υπόψη κατά τον αρχικό σχεδιασμό), ο μόνος τρόπος για να διαπιστωθεί η βιωσιμότητα της κατασκευής είναι η διεξαγωγή λεπτομερειακής μη γραμμικής ανάλυσης.

Εκείνο βέβαια που θα πρέπει να τονιστεί είναι ότι μία μη γραμμική ανάλυση είναι σημαντικά πιο δαπανηρή από την αντίστοιχη γραμμική ανάλυση και απαιτεί μία βαθύτερη κατανόηση, τόσο των μη γραμμικών διατυπώσεων των εξισώσεων ισορροπίας των πεπερασμένων στοιχείων, όσο και των αλγορίθμων επίλυσης των καθολικών μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν. Η τάση για σχεδιασμό κατασκευών που βασίζεται σε λεπτομερή μη γραμμική ανάλυση προβλέπεται ότι θα αυξάνεται συνεχώς και θα συμβαδίζει με τον σχεδιασμό τολμηρότερων και καινοτόμων κατασκευών σε συνδυασμό με τη χρήση ισχυρότερων υπολογιστών.

Η μη γραμμική ανάλυση έχει ορισμένες ιδιαιτερότητες σε σχέση με τη γραμμική ανάλυση όπως ότι **δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας**. Αυτό σημαίνει ότι τα φορτία δεν μπορούν να κλιμακωθούν με κάποιο φορτικό συντελεστή ούτε και να συνδυαστούν μεταξύ τους όπως στη γραμμική ανάλυση. Κατά συνέπεια **μόνο μία φόρτιση μπορεί να εξετάζεται κάθε φορά**. Επίσης η ιστορία της φόρτισης μπορεί να παίζει σημαντικό ρόλο στη συμπεριφορά της κατασκευής, ενώ η ύπαρξη αρχικών τάσεων μπορεί ενίοτε να προκαλέσει απροσδόκητα αποτελέσματα.

Κατά τη μη γραμμική ανάλυση των κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθούνται, όπως και στη γραμμική ανάλυση, τα εξής στάδια:

(i) Μετάβαση από το φυσικό πρόβλημα που είναι η κατασκευή στο μαθηματικό προσομοίωμα που είναι ο φορέας. (ii) Μετάβαση από τον φορέα στο προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων με την επιλογή του τύπου των στοιχείων και τη μόρφωση του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων. (iii) Μετάβαση από το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων στο υπολογιστικό προσομοίωμα με τη μόρφωση και την επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας. (iv) Πιστοποίηση (validation) των προσομοιωμάτων που υιοθετήθηκαν στα στάδια (ii) και (iii). Ο έλεγχος αυτός είναι ιδιαίτερα απαραίτητος στη μη γραμμική ανάλυση και πραγματοποιείται με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με ανάλογα αποτελέσματα παρομοίων κατασκευών ή

πειραματικών διατάξεων εφόσον υπάρχουν ή, σε αντίθετη περίπτωση, με τον έλεγχο της απόκρισης του προσομοιώματος σε παραδείγματα αναφοράς (benchmark tests) τα οποία υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία.

Η γραφική παράσταση τόσο των δεδομένων (φορτίων και δικτύου πεπερασμένων στοιχείων) όσο και των αποτελεσμάτων (μετατοπίσεων, κατανομών τάσεων, εντατικών μεγεθών) βοηθούν σημαντικά στον εντοπισμό τυχόν αβλεψιών κατά την εισαγωγή των δεδομένων, ή σφαλμάτων που σχετίζονται με την προσομοίωση ή την επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων. Θα πρέπει επίσης να τονιστεί η αυξημένη επιρροή των παραμέτρων της προσομοίωσης στα αποτελέσματα, σε σχέση με τη γραμμική ανάλυση, όπως είναι ο τύπος του πεπερασμένου στοιχείου, οι κινηματικές και καταστατικές σχέσεις, καθώς και οι μη γραμμικοί αλγόριθμοι επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας του φορέα.

Οι **κινηματικές σχέσεις** θα πρέπει να περιγράφουν με ακρίβεια τις γεωμετρικές μη γραμμικότητες του φορέα, οι **καταστατικές σχέσεις** να αποδίδουν με αξιοπιστία τη μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού **οι εξισώσεις ισορροπίας** να διατυπώνονται στην τρέχουσα παραμορφωμένη διαμόρφωση του φορέα, ενώ **οι μη γραμμικοί αλγόριθμοι** επίλυσης θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθούν χωρίς απόκλιση και σε σύντομο υπολογιστικό χρόνο την καμπύλη φορτίου του φορέα, ή τις καμπύλες διακλάδωσης προκειμένου περί δευτερευουσών δρόμων ισορροπίας του φορέα.

5.2 Μη γραμμική ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά τη διατύπωση του μητρώου ακαμψίας, υποθέσαμε ότι οι μετατοπίσεις είναι μικρές και ότι το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά. Επιπλέον, υποθέσαμε ότι οι συνοριακές συνθήκες δεν μεταβάλλονται μετά την εφαρμογή του φορτίου. Με αυτές τις υποθέσεις καταλήγουμε σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η ισορροπία του συνόλου της κατασκευής :

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (5.1)$$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων θα μας δώσει τη γραμμική λύση του προβλήματος, αφού οι μετατοπίσεις \mathbf{U} (δηλαδή η λύση του συστήματος) συνδέονται με το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων \mathbf{R} με μια μη γραμμική σχέση. Έτσι αν το διάνυσμα

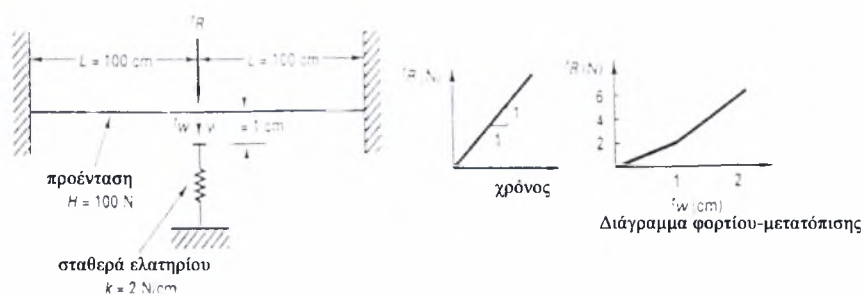
\mathbf{R} γίνει \mathbf{aR} , όπου \mathbf{a} ένας πραγματικός συντελεστής, τότε το διάνυσμα των μετατοπίσεων που θα προκύψει θα είναι \mathbf{aU} . Όταν η συμπεριφορά του πραγματικού φορέα διαφέρει από τα αποτελέσματα που θα μας δώσει μια τέτοια ανάλυση η οποία στηρίζεται στην αρχή της επαλληλίας, είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε μη γραμμική ανάλυση.

Είναι χρήσιμο να αναλυθεί με περισσότερη λεπτομέρεια που οι παραπάνω υποθέσεις επηρεάζουν τις εξισώσεις ισορροπίας (5.1). Η υπόθεση ότι οι μετατοπίσεις πρέπει να είναι μικρές εισάγεται στην διατύπωση του μητρώου ακαμψία \mathbf{K} και του διανύσματος των φορτίων \mathbf{R} , διότι όλες οι ολοκληρώσεις έγιναν πάνω στον όγκο του αρχικού φορέα καθώς και το μητρώο παραμορφώσεων-μετατοπίσεων \mathbf{B} (για το Tric: $\mathbf{B}=\alpha_N$) κάθε στοιχείου θεωρήσαμε ότι είναι σταθερό και ανεξάρτητο των μετατοπίσεων του στοιχείου. Παράλληλα η υπόθεση του γραμμικού ελαστικού υλικού στηρίζεται στη χρήση του σταθερού καταστατικού μητρώου \mathbf{C} (για το Tric: $\mathbf{C} = \kappa_c$). Τέλος η παραδοχή των σταθερών συνοριακών συνθηκών πραγματοποιείται με τη χρήση μη μεταβαλλόμενων δεσμευμένων σχέσεων στις καθολικές εξισώσεις ισορροπίας. Εάν κατά τη διάρκεια επιβολής του φορτίου η μετατόπιση σε κάποιο σημείο του φορέα ήταν τέτοια ώστε κάποιος βαθμός ελευθερίας να παύει να είναι πλέον ελεύθερος, τότε η απόκριση είναι μη γραμμική. Τέτοιες περιπτώσεις προκύπτουν, για παράδειγμα, σε προβλήματα επαφής (contact problems), όπως στο Παράδειγμα 1 που ακολουθεί.

Παράδειγμα 1

Ένα προεντεταμένο καλώδιο υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση στο μέσον του όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Σε απόσταση $w_0 = 1\text{ cm}$ από το σημείο εφαρμογής του φορτίου υπάρχει ένα ελατήριο. Με την παραδοχή ότι οι μετατοπίσεις είναι μικρές ώστε η δύναμη προέντασης του καλωδίου να παραμένει σταθερή, ζητείται το διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης για συνεχώς αυξανόμενο φορτίο. Αμελούμε τις αδρανειακές δυνάμεις κατά την επιβολή του φορτίου και θεωρούμε μικρές μετατοπίσεις. Όσο οι μετατοπίσεις είναι μικρότερες της απόστασης w_0 η εξίσωση ισορροπίας εκφράζεται από την εξίσωση

$${}^tR = 2H \frac{{}^t w}{L} \quad (\alpha)$$



Σχήμα 5.1 Μη γραμμικότητα συνοριακών συνθηκών (Παράδειγμα προβλήματος επαφής): Προεντεταμένο καλώδιο με ελαστική στήριξη

Μόλις η μετατόπιση υπερβεί την τιμή w_0 τότε η εξίσωση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση

$${}^tR = 2H \frac{{}^t w}{L} + k({}^t w - w_0) \quad (\beta)$$

Η καμπύλη φορτίου-μετατόπισης φαίνεται στο σχήμα 5.1γ.

5.3 Είδη και κατηγοριοποίηση των μη γραμμικών προβλημάτων

Στην ανάλυση των κατασκευών απαντώνται δύο είδη μη γραμμικότητας: η γεωμετρική μη γραμμικότητα και η μη γραμμικότητα του υλικού. Η πρώτη λαμβάνεται υπόψη όταν οι αλλαγές στη γεωμετρία ή στις συνθήκες στηρίξεως, ανεξάρτητα από το αν είναι μικρές ή μεγάλες, επηρεάζουν αισθητά τη σχέση φορτίου-μετατόπισης, ενώ η δεύτερη μορφή μη γραμμικότητας λαμβάνεται υπόψη όταν η καταστατική σχέση τάσης - ανηγμένης παραμόρφωσης του υλικού είναι μη γραμμική.

Ανάλογα με το μέγεθος των ανηγμένων παραμορφώσεων έχουμε τη γεωμετρική μη γραμμικότητα με μεγάλες μετακινήσεις, μέτριες στροφές και μικρές τροπές, τη γεωμετρική μη γραμμικότητα με μεγάλες μετατοπίσεις (μετακινήσεις και στροφές) και μικρές τροπές καθώς και τη γεωμετρική μη γραμμικότητα με μεγάλες μετατοπίσεις και μεγάλες τροπές. Τα παραπάνω ομαδοποιούνται στον πίνακα:

Είδος ανάλυσης	Σύντομη περιγραφή
Μόνο μη γραμμικότητα του υλικού	<ul style="list-style-type: none"> ✓ απειροστές μετατοπίσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις ✓ μη γραμμική σχέση $\sigma - \epsilon$
Μεγάλες μετατοπίσεις , μεγάλες στροφές αλλά μικρές ανηγμένες παραμορφώσεις	<ul style="list-style-type: none"> ✓ οι μετατοπίσεις και οι στροφές είναι μεγάλες αλλά η μεταβολή του μήκους των ινών και η αλλαγή των μεταξύ τους γωνιών είναι μικρή ✓ η σχέση $\sigma - \epsilon$ μπορεί να είναι είτε γραμμική είτε μη γραμμική
Μεγάλες μετατοπίσεις, μεγάλες στροφές και μεγάλες παραμορφώσεις	<ul style="list-style-type: none"> ✓ η μεταβολή του μήκους των ινών και η αλλαγή των μεταξύ τους γωνιών είναι μεγάλη ✓ οι μετατοπίσεις των ινών και οι στροφές τους μπορούν επίσης να είναι μεγάλες ✓ η σχέση $\sigma - \epsilon$ μπορεί να είναι είτε γραμμική είτε μη γραμμική

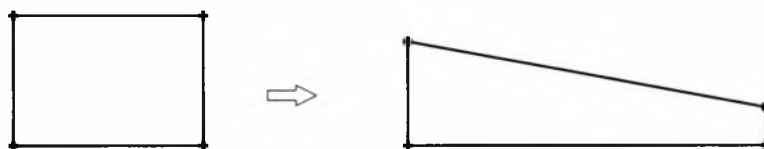
Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν κάνουμε ανάλυση με μη γραμμικότητα μόνο του υλικού, η μη γραμμική απόκριση οφείλεται αποκλειστικά στη μη γραμμική σχέση τάσεων-παραμορφώσεων (σ - ϵ). Οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές κάτι που επιτρέπει τη χρήση των γνωστών μας τεχνικών τάσεων και παραμορφώσεων

για την περιγραφή της συμπεριφοράς της κατασκευής. Για τη δεύτερη περίπτωση του παραπάνω πίνακα σημειώνουμε ότι η σχέση τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων μπορεί να είναι είτε γραμμική είτε μη γραμμική.

Για τη σωστή εφαρμογή των παραπάνω θα πρέπει να είμαστε σε θέση να καθορίσουμε πια από τις προηγούμενες προσεγγίσεις είναι η καταλληλότερη ώστε το αποτέλεσμα που θα πάρουμε να περιγράφει την πραγματική απόκριση της κατασκευής. Σίγουρα η τρίτη και γενικότερη περίπτωση θα είναι «πάντα σωστή». Παρόλα αυτά όμως μια λιγότερο πολύπλοκη ανάλυση μπορεί να είναι υπολογιστικά πιο οικονομική και να δώσει μια καλύτερη εικόνα για το πως θα συμπεριφερθεί η κατασκευή στην πραγματικότητα. Παρακάτω απεικονίζονται σχηματικά όλα τα είδη μη γραμμικής συμπεριφοράς ενός στοιχείου.

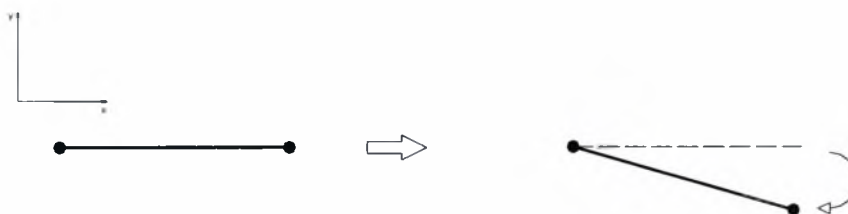
A) Γεωμετρική μη γραμμικότητα

1. Αλλαγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών



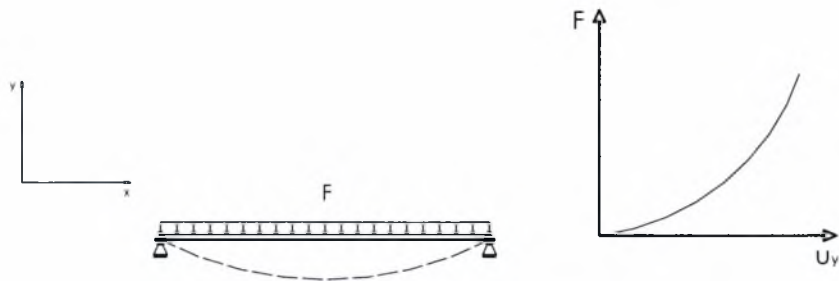
Σχήμα 5.2 Μεγάλες παραμορφώσεις (large strain)

2. Αλλαγή προσανατολισμού στοιχείου



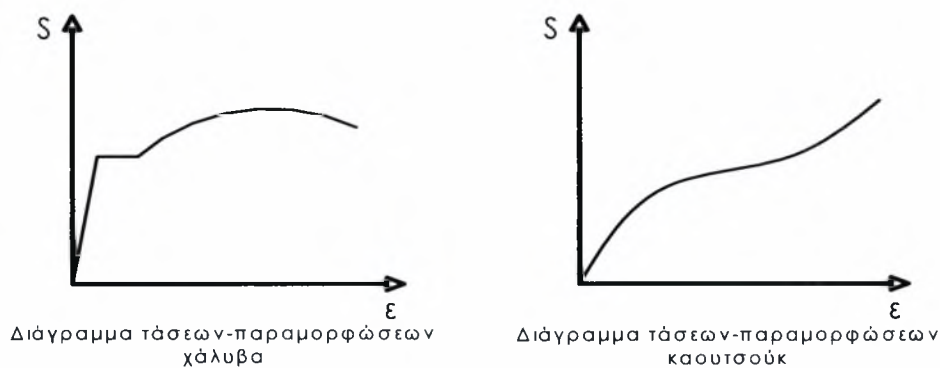
Σχήμα 5.3 Μεγάλες στροφές (large rotation)

3. Μετακινήσεις που προκαλούν σημαντικές εντός επιπέδου τάσεις



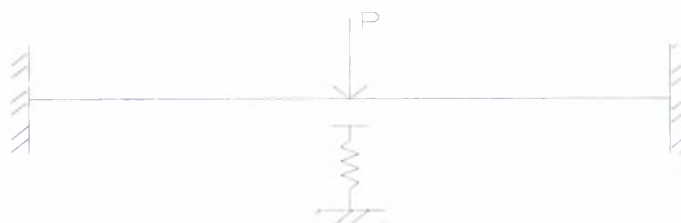
Σχήμα 5.4 Μεταβολή δυσκαμψίας λόγω ορθών δυνάμεων (stress stiffening)

B) Μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού



Σχήμα 5.5 Μη γραμμική συμπεριφορά που οφείλεται στο νόμο του υλικού

Γ) Μη γραμμικότητα λόγω αλλαγής συνοριακών συνθηκών



Σχήμα 5.6 Μη γραμμική συμπεριφορά λόγω προβλήματος επαφής με στήριξη – ελατήριο.

5.4 Η μέθοδος Newton-Raphson.

Η λύση των μη γραμμικών προβλημάτων προκύπτει μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία. Το συνολικό φορτίο (έστω \mathbf{R}) εφαρμόζεται στην κατασκευή σε βήματα έτσι στο βήμα t το φορτίο θα είναι : ${}^t\mathbf{R}$.

Ανάμεσα σε δυο διαδοχικές επαναλήψεις η ανάλυση γίνεται με τη βοήθεια γραμμικών σχέσεων. Άρα η ανάλυση ουσιαστικά είναι γραμμική απλά οι πολλές επαναλήψεις και η συνεχής τροποποίηση των μητρών προσεγγίζουν όπως θα δούμε παρακάτω πολύ καλά τη μη γραμμική συμπεριφορά. Η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε είναι :

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = 0 \quad (5.2)$$

όπου :

${}^t\mathbf{R}$: Τα εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία κατά το t βήμα φόρτισης. Σε αυτά περιλαμβάνονται οι ισοδύναμες δράσεις των κατανεμημένων –επιφανειακών ή χωρικών- φορτίων καθώς και τα συγκεντρωμένα επικόμβια φορτία. Δηλαδή :

$${}^t\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R}_V + {}^t\mathbf{R}_S + {}^t\mathbf{R}_c$$

${}^t\mathbf{F}$: Οι επικόμβιες αντιδράσεις συμβιβαστές με τις εσωτερικές τάσεις των στοιχείων κατά το t βήμα φόρτισης. Προκύπτουν από το ολοκλήρωμα :

$${}^t\mathbf{F} = \sum_m \int_{V^{(m)}} {}^t\mathbf{B}^{(m)T} {}^t\boldsymbol{\tau}^{(m)} {}^t dV^{(m)} \quad (5.3)$$

όπου σε μια ανάλυση με μεγάλες παραμορφώσεις οι τάσεις, η γεωμετρία καθώς και ο όγκος είναι άγνωστα κατά τη χρονική στιγμή t .

5.5 Μαθηματική διατύπωση της μεθόδου Newton - Raphson.

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας ψάχνουμε τη ρίζα. Αν x_{i-1} μια πρώτη εκτίμηση για την τιμή της ρίζας, τότε :

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \quad (5.4)$$

έχοντας υπολογίσει το x_i από την ίδια σχέση υπολογίζουμε το x_{i+1} κ.ο.κ. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου έχουμε βρει την ρίζα με ικανοποιητική ακρίβεια. Το αν η ακρίβεια είναι ικανοποιητική εξαρτάται από το είδος του προβλήματος και στο πρόγραμμα καθορίζεται από το κριτήριο σύγκλισης που εμείς επιλέξαμε και για το οποίο θα γίνει εκτενής αναφορά σε επόμενη παράγραφο. Η σχέση (5.4) προκύπτει αν αναπτύξουμε κατά Taylor τη συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$.

$$f(x_i) = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \text{όροι ανωτέρας τάξεως} = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

αφού ψάχνουμε για ρίζα $f(x_i) = 0$ όποτε :

$$0 = f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

```

program NR
implicit none
real(8):: palia,nea,dummy
integer::i=0
write(*,*)'Give initial value'
read(*,*)palia
do while (abs(F(nea)).GE.1.e-7)
i=i+1
nea=palia-F(palia)/DF(palia)
dummy=palia
palia=nea
end do
write(*,*) 'root=',nea,'i=',i
contains
real function F(x)
real(8)::x
F=.....
end function F
real function DF(x)
real(8)::x
DF=.....
end function DF
end program NR

```

Πρόγραμμα Newton-Raphson
σε γλώσσα
προγραμματισμού **Fortran 90**

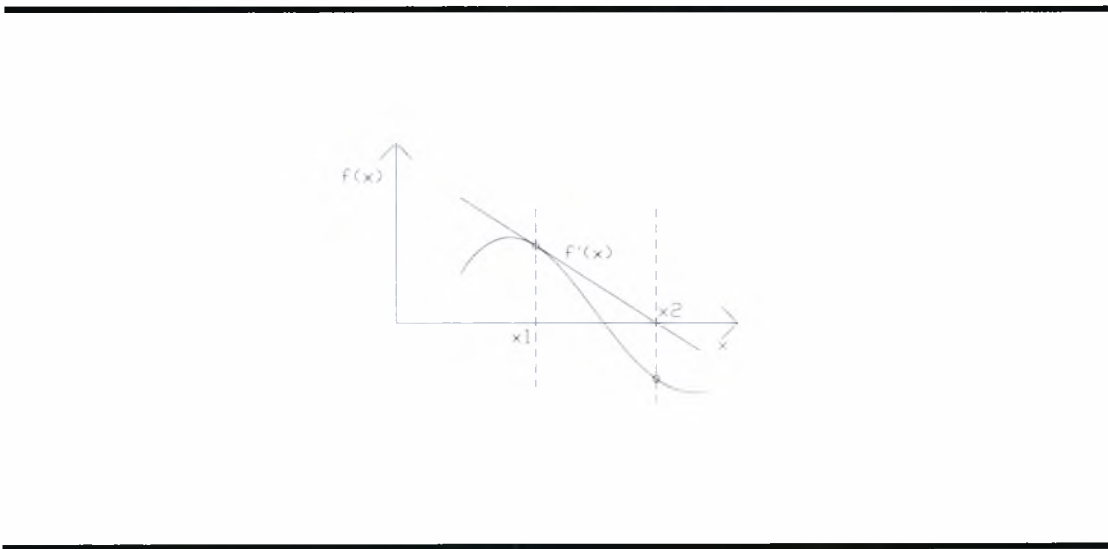
Παράδειγμα 2:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ και εκτιμάμε μια πρώτη τιμή για τη ρίζα, $x_0=2$

Επανάληψη	x_i
0	2.0
1	4.185039863
2	2.467893675
3	3.266186277
4	3.140943912
5	3.141592654

Παρατηρούμε ότι ρυθμός σύγκλισης γίνεται ταχύτατος από τη στιγμή που επιτυγχάνεται τετραγωνική σύγκλιση (μετά την 4^η επανάληψη)

Σχηματικά :



Σχήμα 5.7 Ταχύτατη σύγκλιση της μεθόδου Newton Raphson στη πραγματική ρίζα της συνάρτησης.

5.6 Διατύπωση της μεθόδου Newton–Raphson για πολυβάθμια συστήματα

Η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε είναι η (5.2):

$$\underline{f}(\underline{U}) = {}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^{t+\Delta t}\underline{F} = 0$$

όπου το \underline{f} είναι ένα διάνυσμα κάθε γραμμή του οποίου αντιστοιχεί σε ένα βαθμό ελευθερίας του συστήματος. Για να υπάρχει ισορροπία πρέπει κάθε γραμμή του \underline{f} να είναι μηδέν. Η διαδικασία είναι ανάλογη με εκείνη που ακολουθήθηκε για τα μονοβάθμια συστήματα, έτσι αν αναπτύξουμε κατά Taylor τη συνάρτηση $\underline{f}(\underline{U})$ στο διάστημα $[U^{i-1}, U^i]$:

$$0 = \underline{f}({}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}) + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{U}} \right|_{{}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}} \cdot \Delta \underline{U}^{(i)}$$

όπου

$$\Delta \underline{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}$$

επειδή όμως $\underline{f}({}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}) = {}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}^{(i-1)} = 0$, προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{U}} \right|_{{}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}} = - \left. \frac{\partial \underline{F}({}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)})}{\partial \underline{U}} \right|_{{}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}} = - {}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(i-1)}$$

όπου $- {}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(i-1)}$ το εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας, το οποίο είναι συμμετρικό. Από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στις τελικές εξισώσεις της μεθόδου Newton Raphson, για $i = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(i-1)} \Delta \underline{U}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)} + \Delta \underline{U}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

με αρχικές συνθήκες:

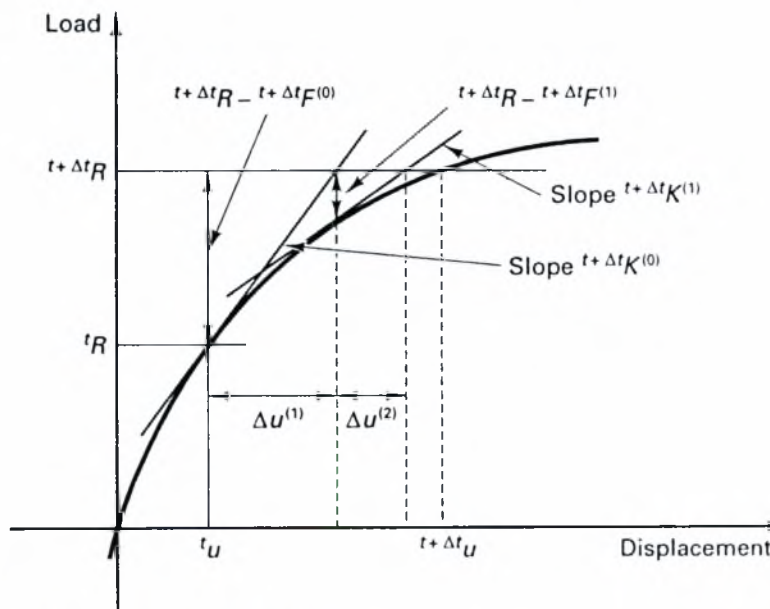
$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(0)} = {}^t\underline{U}$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(0)} = {}^t\underline{K}$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{F}^{(0)} = {}^t\underline{F}$$

Η διαδικασία στηρίζεται στο ότι υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t η ισορροπία ικανοποιείται και η κατάσταση του φορέα μας είναι γνωστή. Λύνουμε για τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ θεωρώντας κατάλληλα μικρές αυξήσεις του φορτίου. Αφού πάρουμε μια πρώτη λύση για τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ θα ελέγξουμε εάν η (5.2) ικανοποιείται. Το εκτός ισορροπίας διάνυσμα ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}$ μας δίνει το μέγεθος του φορτίου που δεν έχει εξισορροπηθεί από τις τάσεις. Εάν αυτό είναι επαρκώς μικρό τότε θεωρούμε ότι η (5.2) ικανοποιείται και ο φορέας ισορροπεί. Διαφορετικά πρέπει να ανανεώσουμε τις επικόμβιες μετατοπίσεις με νέα επανάληψη μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση.

Η σύγκλιση που επιτυγχάνεται είναι ταχύτατη. Μειονέκτημα της μεθόδου και σημαντικό πρόβλημα κατά τη μη γραμμική διαδικασία αποτελεί το ότι απαιτείται μεγάλος αριθμός πράξεων και κατά συνέπεια ο υπολογιστικός φόρτος είναι ιδιαίτερα αυξημένος. Το μεγαλύτερο μέρος αυτών των πράξεων, αφορά την υπολογισμό και την παραγοντοποίηση του μητρώου ακαμψίας. Η διαδικασία αποδίδεται σχηματικά για ένα μονοβάθμιο σύστημα :



Σχήμα 5.8 Η πλήρης μέθοδος Newton-Raphson για ένα μονοβάθμιο σύστημα

Η βασικότερη τροποποίηση της προηγούμενης μεθόδου της γνωστής και ως πλήρης Newton -Raphson (full Newton-Raphson) στηρίζεται στην προσπάθεια μείω-

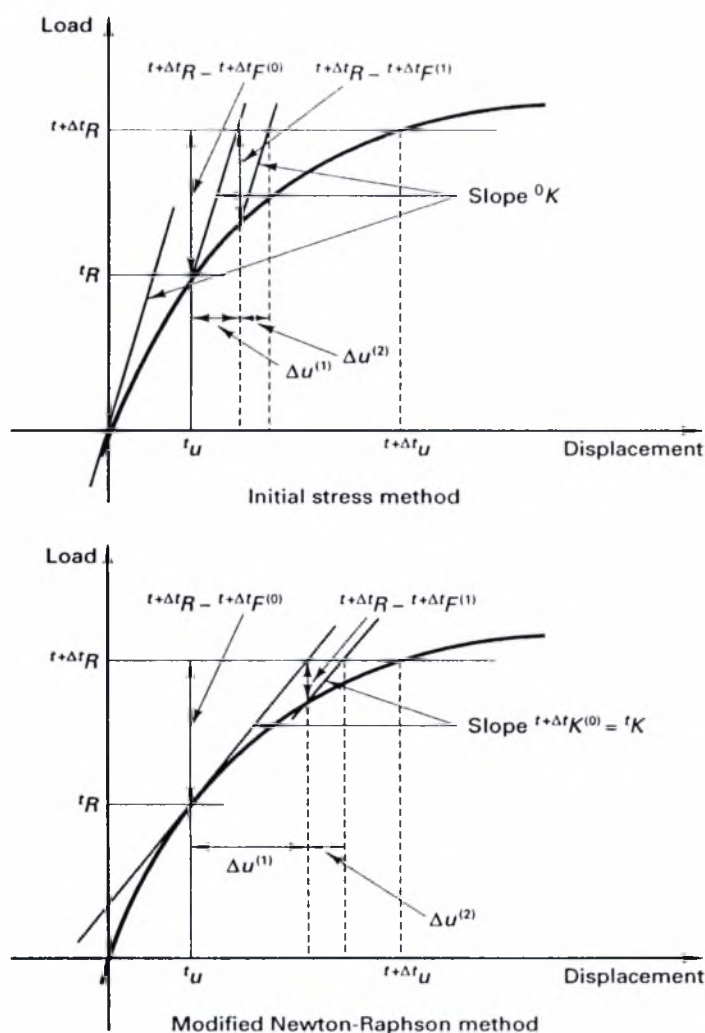
σης του υπολογιστικού φόρτου χρησιμοποιώντας το αρχικό ή κάποιο άλλο μητρώο ακαμψίας. Οι δυο κυριότερες παραλλαγές είναι:

$${}^t\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (5.6)$$

- όταν $\tau = 0$: μέθοδος αρχικών τάσεων (**initial stress method**). Όπου ${}^0\mathbf{K}^{(i-1)}$ το αρχικό μητρώο ακαμψίας. Η μέθοδος αυτή μπορεί να συγκλίνει πολύ αργά ή ακόμα και να αποκλίνει.
- όταν $\tau = t$: τροποποιημένη Newton-Raphson (**modified Newton-Raphson**). Όπου ${}^t\mathbf{K}^{(i-1)}$ το μητρώο ακαμψίας του βήματος t . Η χρονική στιγμή t μπορεί να αντιστοιχεί είτε στην αρχική επίλυση του βήματος φόρτισης είτε σε συγκεκριμένες στιγμές ανάλογα με το πρόβλημα.

Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι το μητρώο ακαμψίας υπολογίζεται λιγότερες φορές. Παρόλα αυτά η σύγκλιση παύει να είναι τετραγωνική, επομένως οι επαναλήψεις που απαιτούνται είναι πολύ περισσότερες από ότι με την πλήρη Newton Raphson. Το πια διαδικασία είναι πιο αποδοτική εξαρτάται από τη μορφή του προβλήματος και τις ιδιαιτερότητές του. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι η πλήρης Newton Raphson είναι πιο ισχυρή μέθοδος για να επιτευχθεί η σύγκλιση, αλλά όταν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τροποποιημένη μέθοδος, το κόστος μπορεί να μειωθεί σημαντικά

Οι σχέσεις που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος είναι οι ίδιες με εκείνες της πλήρους Newton-Raphson. Οι δυο διαδικασίες αποδίδονται σχηματικά για ένα μονοβάθμιο σύστημα :



Σχήμα 5.9 Η μέθοδος των αρχικών τάσεων και η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson

5.7 Κριτήρια σύγκλισης

Η σωστή επιλογή του κριτηρίου σύγκλισης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι καθοριστική. Στο τέλος κάθε επανάληψης το πρόγραμμα συγκρίνει τη λύση που έχουμε με την ανοχή που καθορίσαμε χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκλισης που εμείς επιλέξαμε. Εάν το κριτήριο ικανοποιείται το πρόγραμμα διακόπτεται εάν όχι προχωράει σε νέα επανάληψη. Συνολικά μπορούμε να πούμε ότι τα κριτήρια αυτά καθορίζουν πόσο καλά η λύση ικανοποιεί τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα.

Τα κριτήρια σύγκλισης είναι τριών κατηγοριών ανάλογα με τις ποσότητες που συγκρίνουν. Μπορεί να συγκρίνουν :

1) Ενέργεια

Το κριτήριο εσωτερικής ενέργειας καθορίζει πόσο κοντά βρίσκονται οι δυνάμεις όσο και οι μετατοπίσεις στις τιμές ισορροπίας. Μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$\frac{\Delta \bar{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)})}{\Delta \bar{U}^{(1)T} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F})} \leq \text{ETOL}$$

όπου ο αριθμητής εκφράζει το έργο που καταναλώνεται από τη δύναμη εκτός ισορροπίας σε κάθε βήμα, ενώ ο παρονομαστής την αρχική τιμή του ίδιου έργου. ETOL είναι η προκαθορισμένη ανοχή.

2) Δυνάμεις (ή Ροπές)

Το κριτήριο δυνάμεων εξετάζει πόσο καλά ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας. Μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$\frac{\| {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \|_2}{\text{RNORM}} \leq \text{RTOL}$$

όπου NORM είναι μια δύναμη αναφοράς, συνήθως $\text{RNORM} = \max \| {}^t \mathbf{R} \|_2$. Επίσης η ανοχή RTOL συνήθως είναι τις τάξεις του 0,01.

Τα κριτήρια όπως βλέπουμε υπολογίζουν ευκλείδειες νόρμες διανυσμάτων όπου:

$$\| \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} \|_2 = \sqrt{\sum_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k)^2}$$

3) Μετατοπίσεις

Το κριτήριο μετατοπίσεων εξετάζει πόσο κοντά είναι οι μετατοπίσεις που έχουμε στις πραγματικές. Μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$\frac{\| \Delta \mathbf{U}^{(i)} \|_2}{\text{DNORM}} \leq \text{DTOL}$$

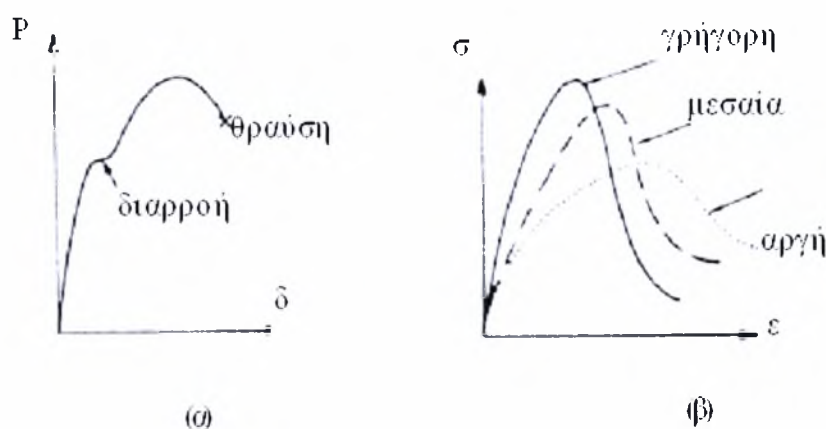
όπου DNORM μια τιμή αναφοράς για τη μετατόπιση και DTOL η ανοχή που επιλέγουμε.

Το σημαντικό για όλα τα παραπάνω κριτήρια είναι να γίνει **προσεκτική επιλογή της ανοχής**. Μια μεγάλη ανοχή θα οδηγούσε σε περιττούς υπολογισμούς, ενώ μια

μικρή σε ανακριβή αποτελέσματα. Επίσης σημειώνεται ότι οι ανοχές πολλές φορές θα πρέπει να πάρουν πολύ μικρές τιμές. Όταν τέλος συγκρίνουμε ποσότητες με διαφορετικές μονάδες αυτό θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν στην ανοχή.

5.8 Μη Γραμμικότητα του Υλικού

Η συμπεριφορά του υλικού πέραν του ελαστικού ορίου παρουσιάζει διάφορα φαινόμενα όπως κράτυση, πτωτικό κλάδο, διαρροή και θραύση (σχήμα 5.10α) τα οποία αποτυπώνονται σε κατάλληλα πειράματα μονοαξονικής έντασης. Επίσης επηρεάζεται και από την ταχύτητα επιβολής του φορτίου ή της παραμόρφωσης όπως φαίνεται στο σχήμα 5.10β.



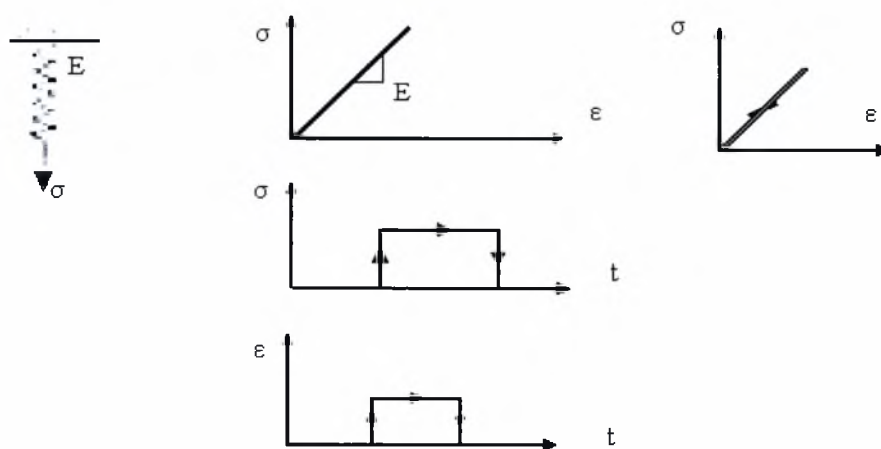
Σχήμα 5.10 (α) Μονοαξονική καμπύλη φορτίου-μετατόπισης ραβδωτού στοιχείου
(β) Επιρροή του ρυθμού μεταβολής του φορτίου

5.9 Μοντέλα συμπεριφοράς του υλικού

5.9.1 Γραμμικό Ελατήριο

Το γραμμικό ελατήριο αποτελεί το βασικό ελαστικό μοντέλο του Hooke. Παρουσιάζει άμεση απόκριση στο επιβαλλόμενο φορτίο και μία σταθερή αναλογία μεταξύ της τάσεως και της ανηγμένης παραμόρφωσης, ενώ οι παραμορφώσεις είναι πλήρως αναστρέψιμες με την αποφόρτιση. Το υλικό που διαθέτει αυτές τις ιδιότητες έχει "τέ-

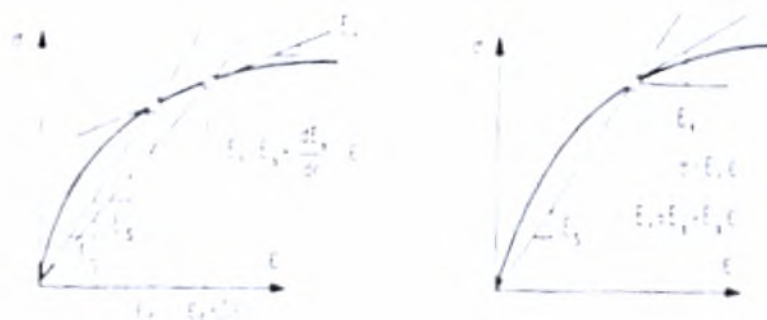
λεια μνήμη" αφού "γνωρίζει" την αρχική και την τρέχουσα κατάσταση ενώ "ξεχνά" οτιδήποτε έχει συμβεί μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων (σχήμα 5.11).



Σχήμα 5.11 Βασικά χαρακτηριστικά γραμμικώς ελαστικού υλικού που υπακούει στον νόμο του Hooke κατά τη φόρτιση και αποφόρτιση

5.9.2 Μη Γραμμικό Ελατήριο

Η συμπεριφορά του μη γραμμικού ελατηρίου μπορεί να διατυπωθεί με διάφορους τρόπους. Ο πιο απλός τρόπος χρησιμοποιεί την ολική θεώρηση με το τέμνον μητρώο ελαστικότητας E_s (secant modulus of elasticity) (σχήμα 5.12α), ενώ ένας δεύτερος τρόπος χρησιμοποιεί τη διαφορική θεώρηση με το εφαπτομενικό μητρώο ελαστικότητας E_T (tangent modulus of elasticity) το οποίο συνδέει τις προσαυξήσεις των τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων (σχήμα 5.12β).



Σχήμα 5.12 Τέμνον (α) και εφαπτομενικό (β) μέτρο ελαστικότητας μη γραμμικού ελαστικού υλικού

Η σχέση η οποία συνδέει το εφαπτομενικό με το τέμνον μέτρο ελαστικότητας γράφεται

$$E_T = E_s + \dot{E}_s \varepsilon \quad (5.7)$$

όπου $\dot{E}_s = dE_s/d\varepsilon$. Έτσι εάν η σχέση $\sigma = f(\varepsilon)$ περιγράφεται από μία παραβολή, όπως θα μπορούσε αν θεωρηθούν οι καμπύλες του σχήματος 5.12, με αρχικό μέτρο E και μέγιστη τιμή στη θέση ε_0 , τότε έχουμε

$$\sigma = f(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{E\varepsilon^2}{2\varepsilon_0} \quad (5.8)$$

ή

$$E_s = E[1 - (\varepsilon/2\varepsilon_0)] \quad (5.9)$$

και

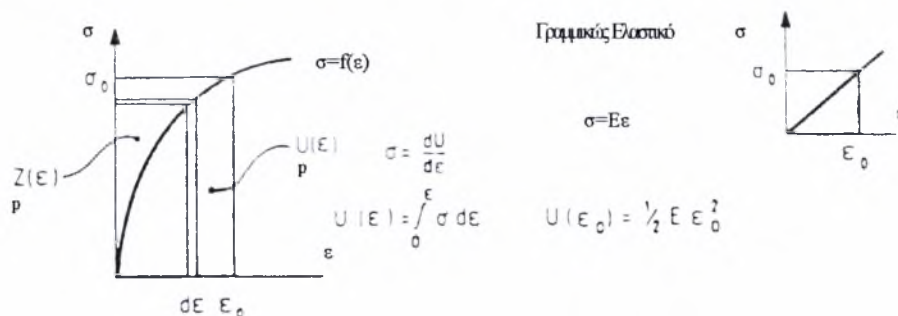
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_T = E(1 - \varepsilon/\varepsilon_0) \quad (5.10)$$

5.9.3 Ελαστική διατύπωση Green

Η μη γραμμική σχέση του υλικού μπορεί ακόμη να εκφραστεί με την ολοκληρωτική διατύπωση, η οποία ονομάζεται επίσης υπερελαστική διατύπωση ή ελαστική διατύπωση Green. Η διατύπωση αυτή υποθέτει την ύπαρξη της **πυκνότητας της ελαστικής ενέργειας** U_p ή της αντίστοιχης πυκνότητας της **συμπληρωματικής ενέργειας** Z_p , οι οποίες συνδέονται με τις τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις μέσω των σχέσεων

$$\sigma = \frac{dU_p}{d\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{dZ_p}{d\sigma} \quad (5.11)$$

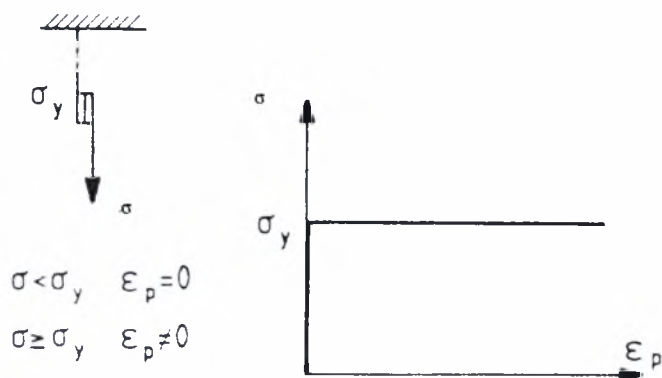
Σε μία μονοαξονική καμπύλη σ - ε , οι ποσότητες U_p και Z_p ισοδυναμούν με τις επιφάνειες που περικλείονται από την καμπύλη και τους άξονες ε και σ , αντίστοιχα. Για γραμμικώς ελαστικό μοντέλο ισχύει $U_p = Z_p$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.13, ενώ αυτό δεν ισχύει σε μη γραμμικά μοντέλα.



Σχήμα 5.13 Πυκνότητα ελαστικής και συμπληρωματικής ενέργειας σε μη γραμμικώς και σε γραμμικώς ελαστικό υλικό

5.9.4 Μοντέλο Τριβής St.Venant

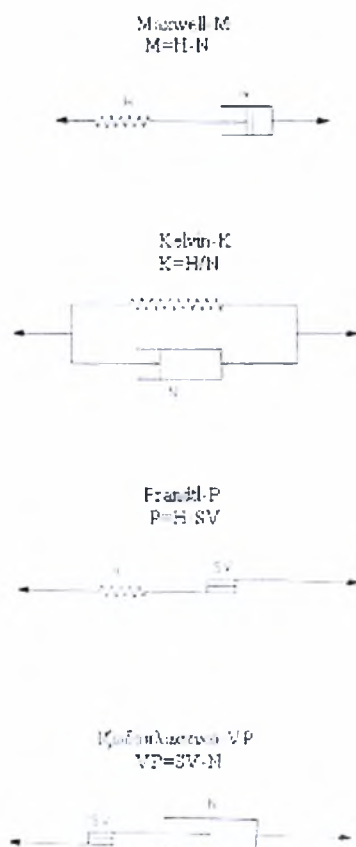
Ένα άλλο βασικό μοντέλο είναι το μοντέλο τριβής του St. Venant (στερεό-απολύτως πλαστικό) όπου οι παραμορφώσεις ενεργοποιούνται μετά την υπέρβαση κάποιας οριακής τιμής της τάσης (σχήμα 5.14).

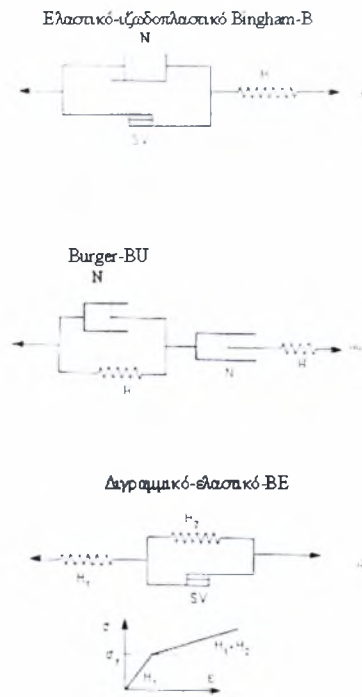


Σχήμα 5.14 Στερεό απολύτως πλαστικό μοντέλο τριβής St. Venant

5.10 Σύνθετα μοντέλα

Τα βασικά μοντέλα σ-ε μπορεί να συνδυαστούν και να δώσουν σύνθετα μοντέλα. Ένας συνδυασμός εν σειρά συμβολίζεται με "-" ενώ ένας συνδυασμός εν παράλληλω με "||". Έτσι ένας αριθμός σύνθετων μοντέλων μπορούν να παραχθούν από τον συνδυασμό του ελαστικού μοντέλου ή μοντέλου του Hooke (H), του ιξώδους αποσβεστήρα ή μοντέλου του Newton (N) και του μοντέλου τριβής ή μοντέλου St. Venant (S.V). Μερικά παραδείγματα αυτών των σύνθετων μοντέλων παρουσιάζονται στο σχήμα 5.15. Ένα διγραμμικό μοντέλο σ-ε με ελαστική αποφόρτιση μπορεί να προκύψει με τον εν σειρά συνδυασμό ενός μοντέλου Hooke με ένα σύνθετο μοντέλο παράλληλης συνδεσμολογίας π.χ. μοντέλου Hooke με μοντέλο S.V (σχήμα 5.15ζ). Το μοντέλο αυτό συχνά γενικεύεται σε πολυαξονικές καταστάσεις τάσεως-ανηγμένης παραμόρφωσης.





Σχήμα 5.15 Σύνθετα μη γραμμικά μοντέλα υλικού

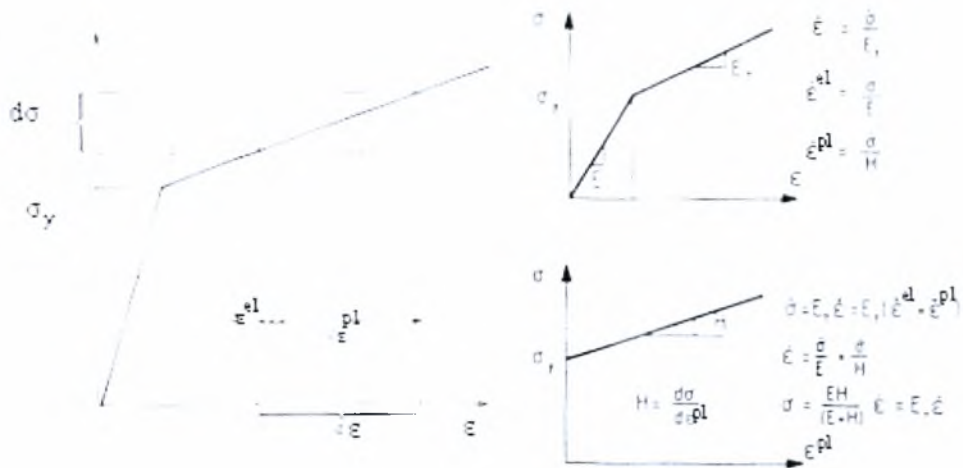
5.11 Ελαστοπλαστικό μοντέλο

Η ανελαστική ανάλυση με τη θεωρία της πλαστικότητας απαιτεί:

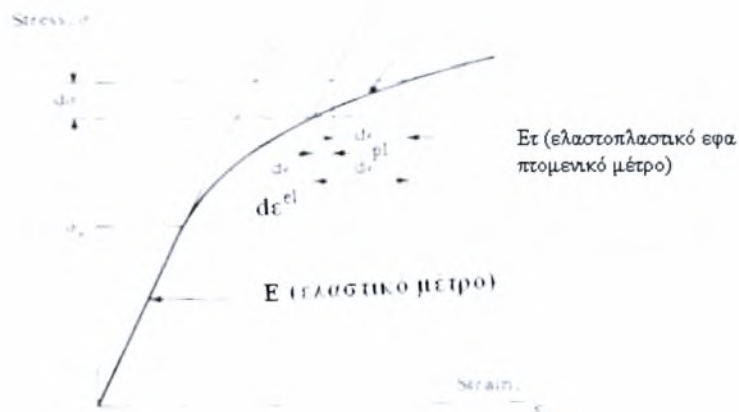
- (i) ένα κριτήριο διαρροής
- (ii) ένα νόμο κράτυνσης-χαλάρωσης για την περιγραφή της επιφάνειας διαρροής κατά την ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων και
- (iii) ένα νόμο πλαστικής ροής για τη συσχέτιση της πλαστικής παραμόρφωσης με τις τάσεις.

Όταν το επίπεδο της τάσης υπερβαίνει μία κρίσιμη τιμή, τότε θεωρούμε ότι το υλικό διαρρέει και από εκεί και πέρα οι προσauxητικές τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις και στο πλαστικό (μη αναστρέψιμο) μέρος συνδέονται με μία ελαστοπλαστική καταστατική σχέση. Η θεμελιώδης παραδοχή συνίσταται στον διαχωρισμό της ολικής προσauxητικής ανηγμένης παραμόρφωσης, στο ελαστικό (αναστρέψιμο του υλικού να ισχύει για τους κλάδους φόρτισης) και το αρχικό ελαστικό μέτρο να διέπει την αποφόρτιση. Σχηματική παράσταση του ελαστοπλαστικού μοντέλου φαίνεται στο σχήμα

5.16 για ένα διγραμμικό μοντέλο και στο σχήμα 5.17 για ένα γενικευμένο μοντέλο. Από το σχήμα 5.16 προκύπτουν οι σχέσεις:



Σχήμα 5.16 Διγραμμικό ελαστοπλαστικό μοντέλο με γραμμική κράτυνση



Σχήμα 5.17 Γενικευμένο ελαστοπλαστικό μοντέλο με μη γραμμική κράτυνση

$$d\epsilon = \frac{d\sigma}{E_T} \quad (5.12\alpha)$$

$$d\epsilon^{el} = \frac{d\sigma}{E}, \quad d\epsilon^{pl} = \frac{d\sigma}{H} \quad (5.12\beta)$$

Το μέτρο κράτυνσης H θεωρείται ότι είναι συνάρτηση μόνο του πλαστικού έργου παραμορφώσεως και δίνεται από τη σχέση

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^{pl}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^{el}} = \frac{1}{d\varepsilon/d\sigma - d\varepsilon^{el}/d\sigma} \quad (5.13\alpha)$$

ή

$$H = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (5.13\beta)$$

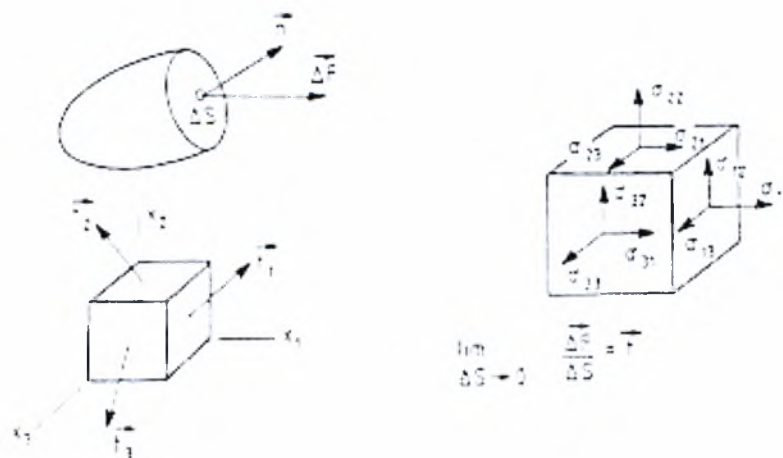
με

$$E_T = E \left(1 - \frac{E}{E + H} \right) \quad (5.13\gamma)$$

Επομένως το μέτρο κράτυνσης μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά από ένα απλό μονοαξονικό πείραμα.

5.12 Μη γραμμικά μοντέλα πολυαξονικής έντασης

Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο ενός σώματος προσδιορίζεται ως γνωστόν από τον ταυνοστή της τάσεως που ορίζεται από τις συνιστώσες του όπως φαίνεται στο σχήμα 5.18. Οι τιμές των συνιστωσών του ταυνοστή της τάσεως εξαρτώνται από το σύστημα των συντεταγμένων στο οποίο αναφέρονται. Με την αλλαγή του συστήματος των συντεταγμένων αλλάζουν οι τιμές των συνιστωσών του ταυνοστή της τάσεως χωρίς να διαφοροποιείται όμως η εντατική κατάσταση στο σημείο του σώματος που εξετάζουμε.



Σχήμα 5.18 Συνιστώσες ταυνοστή τάσεως

Το διάνυσμα της τάσεως ή ο ελκυστής σε ένα σημείο ορίζεται με βάση ένα δεδομένο επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο αυτό. Έτσι, ενώ έχουμε για κάθε σημείο μία εντατική κατάσταση υπάρχει ένα άπειρο πλήθος διανυσμάτων τάσεως που αντιστοιχούν στα άπειρα επίπεδα τα οποία μπορεί να διέλθουν από το σημείο αυτό. Το διάνυσμα της τάσεως αναλύεται στην ορθή συνιστώσα του, κάθετη στο επίπεδο, και στη διατμητική συνιστώσα του επί του επιπέδου.

Το διάνυσμα της τάσεως δεν θα πρέπει να συγχέεται με το διάνυσμα $\{\sigma\}$ το οποίο σε συνδυασμό με το διάνυσμα $\{\epsilon\}$ των τεχνικών ανηγμένων παραμορφώσεων engineering strain χρησιμοποιούνται στην αρχή των δυνατών έργων για τη διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Το διάνυσμα $\{\sigma\}$ είναι ένα τεχνητό διάνυσμα στο οποίο εμπεριέχονται οι έξι από τις εννέα συνιστώσες του ταυυστή της τάσεως και το οποίο ορίζει πλήρως την εντατική κατάσταση αφού λόγω της συμμετρίας του ταυυστή της τάσεως απαιτούνται μόνο έξι από της εννέα συνιστώσες. Κατά συνέπεια, ο οποιοσδήποτε μετασχηματισμός του διανύσματος $\{\sigma\}$ δεν θα πρέπει να ακολουθεί τους κανόνες μετασχηματισμού διανυσμάτων αλλά εκείνους των ταυυστών. Το ίδιο ισχύει και για το διάνυσμα της τεχνικής ανηγμένης παραμόρφωσης $\{\epsilon\}$.

Οι κύριες τάσεις $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, οι οποίες περιγράφουν την εντατική κατάσταση ενός σημείου ως προς τα τρία κύρια επίπεδα, ορίζουν τις τρεις βασικές αναλλοίωτες της τάσεως:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (5.14\alpha)$$

$$J_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (5.14\beta)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (5.14\gamma)$$

Η εντατική κατάσταση μπορεί επίσης να οριστεί ως προς τη συνιστώσα όγκου (σφαιρική ή υδροστατική) και τις αποκλίνουσες (deviatoric) συνιστώσες ή συνιστώσες εκτροπής. **Η υδροστατική συνιστώσα** της τάσεως δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_m = \frac{J_1}{3} \quad (5.15)$$

και **οι αποκλίνουσες συνιστώσες** από τις σχέσεις

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \quad (5.16)$$

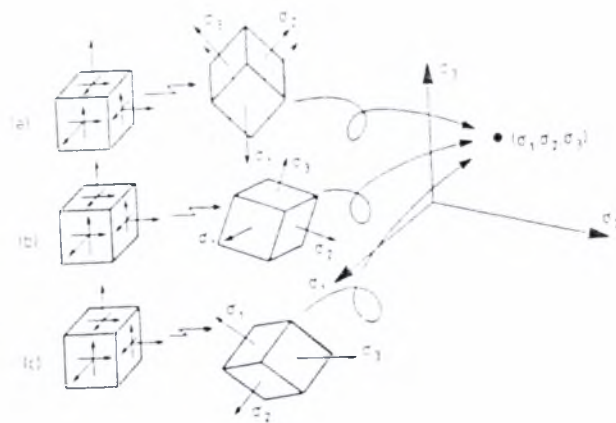
Όπου δ_{ij} ($=1$ ή 0) είναι το δέλτα του Kronecker. Οι κύριες διευθύνσεις του αποκλίνοντος τανυστή της τάσεως συμπίπτουν με τις κύριες διευθύνσεις των τάσεων. Οι κύριες αποκλίνουσες τάσεις $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ ορίζουν τη δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή της τάσεως από τη σχέση

$$J'_2 = \frac{1}{2} (\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2$$

ή

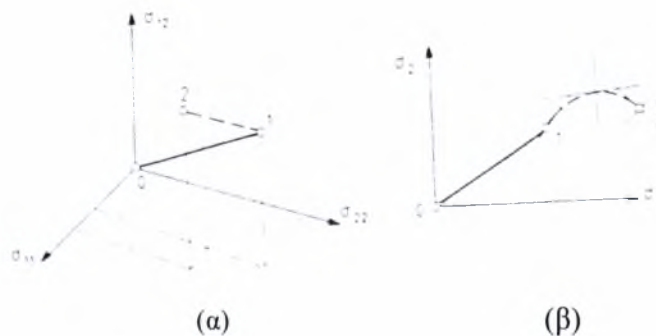
$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] \quad (5.17)$$

Για ισότροπα υλικά, τα οποία έχουν την ίδια συμπεριφορά προς όλες τις διευθύνσεις, οι τρεις κύριες τάσεις είναι επαρκείς για την περιγραφή της εντατικής κατάστασης σε ένα σημείο στον χώρο των κυρίων τάσεων (σχήμα 5.19). Σε κάθε τέτοιο σημείο μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερες της μιας εντατικές καταστάσεις καθώς οι κύριες διευθύνσεις που συνδέονται με τις διαφορετικές εντατικές καταστάσεις δεν αντιπροσωπεύονται στον χώρο των κυρίων τάσεων. Με άλλα λόγια η απεικόνιση των τάσεων του Καρτεσιανού χώρου στον χώρο των κυρίων τάσεων δεν είναι μοναδική. Αυτό οφείλεται στην ισοτροπία του υλικού που επιτρέπει τη μείωση των συνιστωσών των τάσεων από έξι σε τρεις. Κατά συνέπεια η διαρροή του υλικού εξαρτάται μόνο από τον συνδυασμό των τιμών και όχι από τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων.



Σχήμα 5.19 Μη μοναδικότητα της απεικόνισης των Καρτεσιανών συνιστωσών των τάσεων στον χώρο των κυρίων τάσεων

Στο σχήμα 5.20 φαίνονται δύο διαδρομές τάσεων στον τριδιάστατο χώρο των τριών συνιστωσών της τάσης και στον διδιάστατο χώρο των κυρίων τάσεων. Εάν θεωρήσουμε ότι μία προσαύξηση της εντατικής κατάστασης από τη θέση 0 στη θέση 1 εφαρμόζεται αναλογικά τότε η διαδρομή 0-1 θα είναι μία ευθεία γραμμή. Αυτή η φόρτιση ονομάζεται ακτινική φόρτιση. Εάν στη συνέχεια η φόρτιση δεν είναι αναλογική ως προς την αρχική προσαύξηση, με σταθερές π.χ. τις σ_{11} , σ_{12} όπως φαίνεται στο σχήμα 5.20α, τότε η διαδρομή της τάσεως στον χώρο των κυρίων τάσεων θα είναι καμπύλη γραμμή. Στην ακτινική φόρτιση οι κύριες διευθύνσεις δεν μεταβάλλονται μέσα στο προσαυξητικό βήμα σε αντίθεση με τη μη ακτινική φόρτιση.

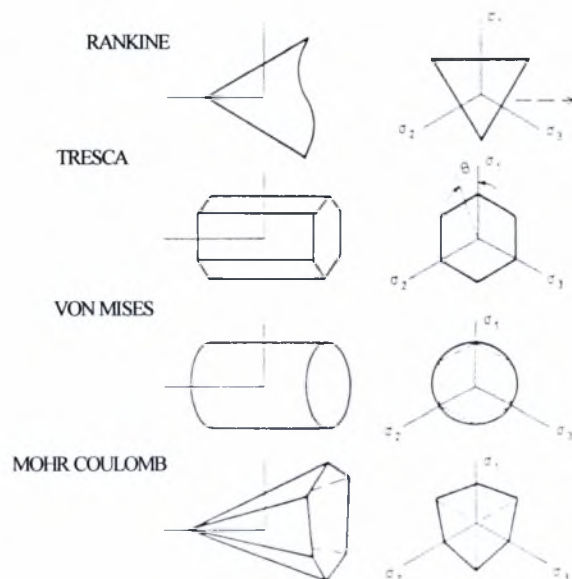


Σχήμα 5.20 Ακτινική και μη ακτινική διαδρομή τάσεων: (α) στον χώρο
(β) στο επίπεδο

5.13 Γενίκευση της μονοαξονικής διαρροής σε τριαξονική διαρροή

Η συνθήκη διαρροής ενός ελαστοπλαστικού υλικού σε μονοαξονική ένταση καθορίζεται από το σημείο διαρροής της καμπύλης σ - ϵ πέραν του οποίου το υλικό παύει να συμπεριφέρεται ελαστικά. Στην περίπτωση όμως ενός υλικού καταπονούμενου σε τριαξονική ένταση η διαρροή επέρχεται όταν υπάρξει ένας συνδυασμός των τιμών των συνιστωσών του τανυστή της τάσεως.

Απαιτείται επομένως μία σειρά πειραμάτων με διάφορους συνδυασμούς των συνιστωσών του τανυστή της τάσεως προκειμένου να περιγραφεί πλήρως η **επιφάνεια διαρροής** του υλικού. Σε ισότροπα υλικά η επιφάνεια διαρροής μπορεί να περιγραφεί πλήρως ως προς οποιαδήποτε τριάδα αναλλοίωτων της τάσεως. Οι κλασικές θεωρίες διαρροής (**Rankine** της μεγίστης εφελκυστικής αντοχής, **Tresca** της μεγίστης διατμητικής αντοχής, **von Mises** της μεγίστης ενέργειας στρέβλωσης, **Mohr/Coulomb** της μεγίστης τριβής) εύκολα παριστάνονται στον τριαξονικό εντατικό χώρο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.21.



Σχήμα 5.21 Τριαξονική παράσταση κριτηρίων διαρροής

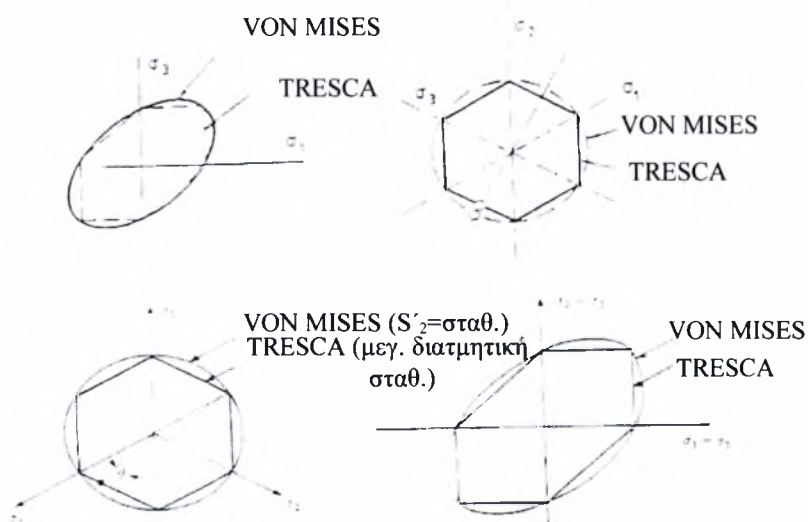
Τα δύο ευρέως χρησιμοποιούμενα κριτήρια διαρροής για μέταλλα είναι τα κριτήρια Tresca και von Mises.

5.14 Κριτήριο διαρροής von Mises

Το κριτήριο διαρροής von Mises, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την ελαστο-πλαστική ανάλυση του Tric, δίνεται από τη σχέση

$$f_y^M = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \kappa^2 = 0 \quad (5.18)$$

όπου $\kappa = \sqrt{2} \sigma_y$ και σ_y είναι η τάση διαρροής σε μονοαξονική εντατική κατάσταση. Η τιμή αυτή του κ προκύπτει από την (5.18) εάν θέσουμε $\sigma_1 = \sigma_y$ και $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Η γεωμετρική διατύπωση του κριτηρίου αυτού είναι ένας κύλινδρος περί τον άξονα $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ και παριστάνεται στο επίπεδο με την έλλειψη του σχήματος 5.22α.



Σχήμα 5.22 Γεωμετρική απεικόνιση διαρροής Tresca von Mises

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού του κριτηρίου von Mises δίνεται ως προς τη δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή J'_2 που σε μονοαξονική ένταση ισούται με

$$J'_2 = \frac{1}{3} \sigma_y^2 \quad (5.19)$$

και η οποία σε συνδυασμό με τις σχέσεις (5.17) και (5.18) δίνει

$$f_y^M = 6J_2' - \kappa^2$$

ή

$$f_y^M = J_2' - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \quad (5.20)$$

Το κριτήριο von Mises αναφέρεται επίσης και ως πλαστικότητα τύπου J_2' δεδομένου ότι θεωρεί ότι η διαρροή επέρχεται όταν η J_2' της πολυαξονικής έντασης ισούται με την J_2' της μονοαξονικής.

Τα κριτήρια von Mises και Tresca είναι κατάλληλα για την περιγραφή της ανελαστικής συμπεριφοράς των μετάλλων, ενώ τα κριτήρια Rankine και Mohr-Coulomb χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της ανελαστικής συμπεριφοράς του σκυροδέματος, των γεωδών και βραχωδών υλικών.

5.15 Πλαστική ροή

Η αρχική επιφάνεια διαρροής που εκφράζεται από τη γενική σχέση

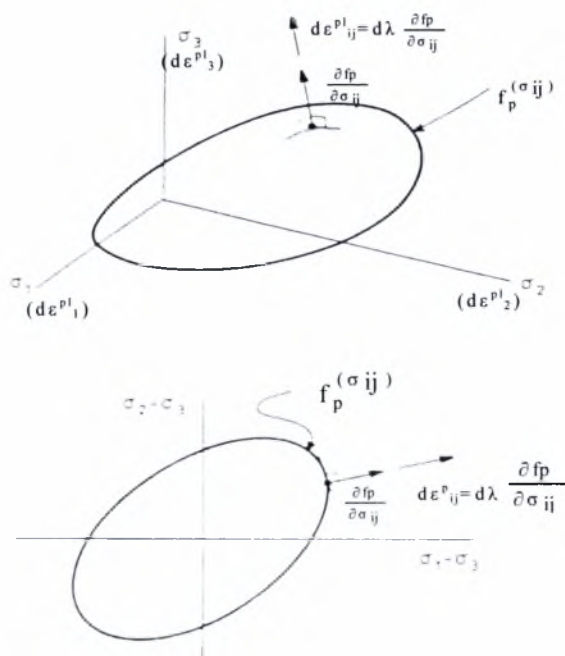
$$f_y(\sigma_{ij}, \sigma_y) = 0 \quad (5.21)$$

δεν είναι επαρκής για τον προσδιορισμό της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς. Απαιτείται πέραν της αρχικής επιφάνειας διαρροής και ο νόμος της αλλαγής της επιφάνειας διαρροής με την αλλαγή της εντατικής κατάστασης. Η περιγραφή ενός εξελικτικού νόμου της επιφάνειας διαρροής βασίζεται σε πειραματικά δεδομένα τα οποία διαφοροποιούνται σημαντικά αναλόγως του τύπου του υλικού. Για τον χάλυβα και άλλα μέταλλα, παραδείγματος χάριν, η αρχική διαρροή θα επέλθει όταν η στρεβλωτική (distortional) πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεως σ' ένα σημείο φτάσει μία κρίσιμη τιμή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το κριτήριο von Mises να αποδίδει ικανοποιητικά τη διαρροή του υλικού. Σε άλλα όμως υλικά, όπως είναι το σκυρόδεμα, τα γεωυλικά και ο βράχος, οι μηχανισμοί διαρροής είναι πιο πολύπλοκοι και τα αντίστοιχα κριτήρια διαρροής που υιοθετούνται είναι λιγότερο αξιόπιστα.

Το **εντατικό σημείο**, δηλαδή το σημείο στον χώρο των κυρίων τάσεων το οποίο καθορίζει την εντατική κατάσταση στη συγκεκριμένη θέση, μπορεί να βρίσκεται εντός ή πάνω στην καμπύλη διαρροής. Ως αποτέλεσμα μιας αλλαγής της φόρτισης του φορέα ένα εντατικό σημείο που βρίσκεται επί της καμπύλης διαρροής έχει τρεις δυνατότητες κινήσεως:

- (i) να αποφορτιστεί επιστρέφοντας στην ελαστική κατάσταση.
- (ii) να κινηθεί επί της καμπύλης διαρροής και να παραμείνει σε ουδέτερη κατάσταση ως προς το κριτήριο διαρροής.
- (iii) να φορτιστεί και να μεταπέσει σε μία άλλη επιφάνεια διαρροής λόγω της κρυστάλλωσης του υλικού.

Το κριτήριο διαρροής καθορίζει το πότε θα συμβεί η πλαστικοποίηση χωρίς όμως να μας δίνει στοιχεία για το είδος της πλαστικής συμπεριφοράς και τον τρόπο με τον οποίο αυξάνεται η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση. Οι πληροφορίες αυτές δίνονται από τον νόμο ροής με τον οποίο ο ρυθμός προσαύξεσης και η διεύθυνση της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης συσχετίζονται με την εντατική κατάσταση και τον ρυθμό προσαύξεσης της τάσεως.



Σχήμα 5.23 Νόμος πλαστικής ροής. Πλαστικό δυναμικό και διανυσματική κλίση του πλαστικού δυναμικού

Ο νόμος πλαστικής ροής παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 5.23 και δίνεται από τη σχέση:

$$d\epsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.22)$$

ή με διανυσματικό συμβολισμό από τη σχέση

$$d\epsilon^{pl} = d\lambda \mathbf{b} \quad (5.23)$$

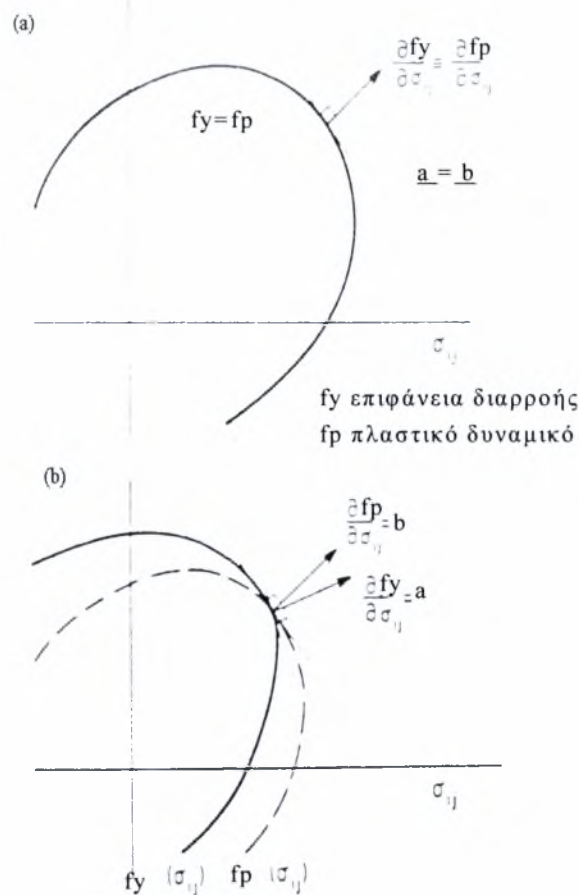
όπου $d\lambda$ είναι ένας συντελεστής αναλογίας ο οποίος υπολογίζεται στη συνέχεια,

$\mathbf{b}^T = \frac{\partial f_p}{\partial \{\sigma\}}$ είναι η διανυσματική κλίση της f_p , όπου η $f_p(\sigma_{ij})$ ορίζει μία επιφάνεια που

ονομάζεται **πλαστικό δυναμικό** (plastic potential).

Η πλαστική παραμόρφωση ή πλαστική ροή πραγματοποιείται στη διεύθυνση την κάθετη στην επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού. Η επιφάνεια f_p ορίζεται και αυτή, όπως και η επιφάνεια διαρροής f_y , από τις συνιστώσες του ταυιστή της τάσεως. Η διανυσματική κλίση του f_p έχει τόσες συνιστώσες όσες απαιτούνται για την περιγραφή του f_p . Έχει επομένως έξι συνιστώσες στον χώρο των τάσεων σ_{ij} και τρεις συνιστώσες στον χώρο των κυρίων τάσεων.

Οι περισσότερες αυστηρές διατυπώσεις της μαθηματικής θεωρίας της πλαστικότητας βασίζονται στον **κανόνα της ορθογωνικότητας** (associated rule), όπου η επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού θεωρείται ότι ταυτίζεται με την επιφάνεια διαρροής (**συναρτημένη πλαστικότητα**). Στα μέταλλα οι δύο επιφάνειες σχεδόν ταυτίζονται σε αντιδιαστολή με τα υλικά όπου αναπτύσσεται τριβή κατά την πλαστική παραμόρφωση (υλικά τριβής) στα οποία ισχύει $f_p \neq f_y$ (σχήμα 5.24).



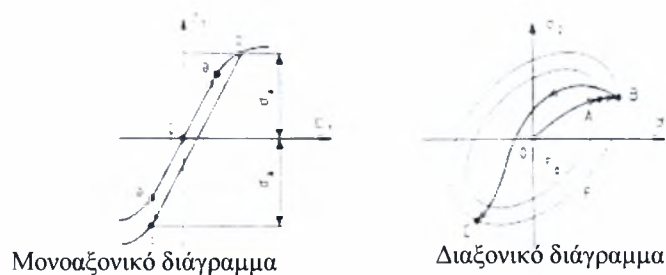
Σχήμα 5.24 (α) Πλαστική ροή με ορθογωνικότητα,
(β) Πλαστική ροή χωρίς ορθογωνικότητα

Οι συνθήκες διαρροής μετά την εμφάνιση της αρχικής διαρροής καθορίζονται από τον εξελικτικό νόμο της επιφάνειας διαρροής

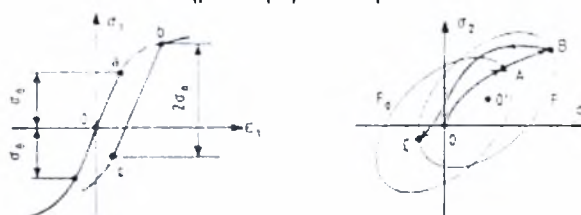
$$f_y(\sigma_{ij}, \kappa(\epsilon_{ij}^{pl})) = 0 \quad (5.24)$$

όπου κ είναι ένας συντελεστής **κράτυνσης** (hardening) ή **χαλάρωσης** (softening) που εξαρτάται από την πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ_{ij}^{pl} . Στη συνέχεια με τον όρο κράτυνση θα εννοούμε κράτυνση ή χαλάρωση κατά τη διαρροή. Οι περισσότεροι νόμοι κράτυνσης είναι **ισοτροπικού** ή **κινηματικού** τύπου. Τυπικά παραδείγματα φαίνονται στο σχήμα 5.25.

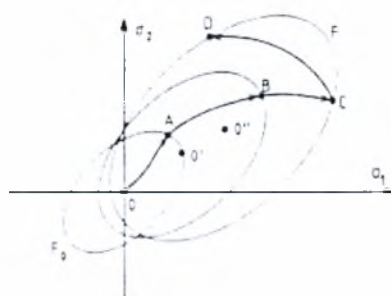
Ισοτροπική κράτυνση



Κινηματική κράτυνση



Μικτή κράτυνση



Σχήμα 5.25 Νόμοι κράτυνσης: (α) ισότροπος, (β) κινηματικός, (γ) μεικτός

Ένας **ισότροπος νόμος κράτυνσης** ισοδυναμεί με μία ομοιόμορφη επέκταση ή συρρίκνωση της επιφάνειας διαρροής

$$f_y^0(\sigma_{ij}) - \kappa(\epsilon_{ij}^{pl}) = 0 \quad (5.25)$$

όπου f_y^0 είναι μία ομογενής συνάρτηση που εκφράζει τη μορφή της επιφάνειας διαρροής και $\kappa(\epsilon_{ij}^{pl})$ χαρακτηρίζει το μέγεθος της επιφάνειας.

Ο **κινηματικός νόμος κράτυνσης** περιγράφει τη μεταφορά της αρχικής επιφάνειας διαρροής σε μία νέα θέση χωρίς την αλλαγή του σχήματος και του μεγέθους της

(φαινόμενο Bauschinger). Οι κινηματικοί νόμοι παίζουν σημαντικό ρόλο κατά την προσομοίωση ανακυκλικής συμπεριφοράς και εκφράζονται από τη σχέση

$$f_y(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}(\epsilon_{kl}^{pl})) = 0 \quad (5.26)$$

όπου α_{ij} είναι μία καταστατική παράμετρος που εξαρτάται από τις τάσεις σ_{ij} και την ιστορία της φόρτισης.

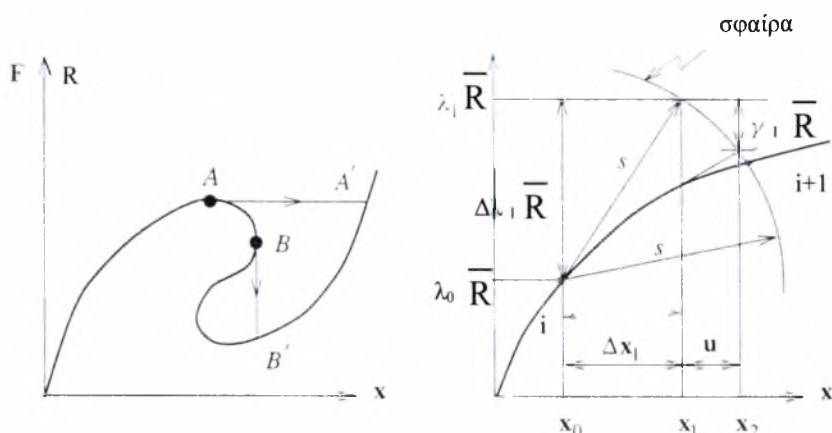
Ο συνδυασμός ισότροπου και κινηματικού νόμου μας δίνει **τον μεικτό νόμο κράτυνσης** όπου η αρχική επιφάνεια διαρροής επεκτείνεται ομοιόμορφα και ταυτόχρονα μετακινείται ως συνέπεια της πλαστικής ροής. Η αντίστοιχη έκφραση της επιφανείας διαρροής δίνεται από τη σχέση

$$f_y(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}(\epsilon_{kl}^{pl})) - k(\epsilon_{ij}^{pl}) = 0 \quad (5.27)$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η διαρροή του υλικού καθορίζεται στη συνέχεια από τη νέα επιφάνεια διαρροής. Το υλικό μετά τη διαρροή του αλλάζει συνεχώς συμπεριφορά η οποία λαμβάνεται υπόψη με τη συνεχώς μεταβαλλόμενη εξίσωση του κριτηρίου διαρροής.

5.16 Η μέθοδος μήκους τόξου

Η μέθοδος μήκους τόξου (arc length) είναι η πλέον διαδεδομένη μέθοδος για την υπερπήδηση οριακών σημείων της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης και την παρακολούθηση ασταθών κλάδων ισορροπίας όπως αυτή του σχήματος 5.26α. Στο σχήμα αυτό απεικονίζονται δύο οριακά σημεία A και B τα οποία ονομάζονται οριζόντια (snap-through) και κατακόρυφα (snap-back) οριακά σημεία αντίστοιχα. Με την επιβολή ενός σταθερού επαυξητικού φορτίου κατά τη διάρκεια των μη γραμμικών επαναλήψεων παρατηρείται δυσκολία ή αδυναμία σύγκλισης της μη γραμμικής επαναληπτικής διαδικασίας στην περιοχή του A. Με την περαιτέρω δε αύξηση του φορτίου η επαναληπτική διαδικασία θα αναζητήσει λύση στην περιοχή του A' αντί του A.



Σχήμα 5.26 (α) Δρόμος ισορροπίας με μεταλυγισμικό τμήμα,
(β) Η μέθοδος του σφαιρικού μήκους τόξου

Στις περιπτώσεις με οριζόντια οριακά σημεία η καμπύλη ισορροπίας μπορεί να ακολουθηθεί με προσαυξήσεις των μετατοπίσεων αντί του φορτίου. Στην περίπτωση αυτή θα υπάρξει όμως πρόβλημα παρακολούθησης της καμπύλης με κατακόρυφα οριακά σημεία. Έτσι για το τμήμα της καμπύλης που βρίσκεται αριστερά της BB' του σχήματος 5.26α θα υπάρξει άλμα της λύσης από το σημείο Β στο σημείο Β'.

Η μέθοδος του μήκους τόξου επιβάλλει δεσμεύσεις στο επιβαλλόμενο εξωτερικό φορτίο έτσι ώστε οι λύσεις που προκύπτουν από τη μη γραμμική επαναληπτική διαδικασία επιλύσεως να συγκλίνουν και σε ασταθείς περιοχές της καμπύλης ισορροπίας. Αυτό επιτυγχάνεται με τον έλεγχο της τιμής του φορτίου μέσω ενός συντελεστή λ . Η εξίσωση ισορροπίας επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$r(x, \lambda) = F(x) - \lambda \bar{R} = 0 \quad (5.28)$$

όπου \bar{R} είναι ένα αντιπροσωπευτικό διάνυσμα φορτίου το οποίο ονομάζεται και φορτίο βάσεως. Η τιμή του λ μπορεί να μεταβάλλεται μέσα σε κάθε προσαυξητικό βήμα κατά την επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson μέσω της ικανοποίησης μιας ε-

πιπρόσθετης εξίσωσης η οποία καθορίζει τη μεταβολή του φορτίου εντός του επαυξητικού βήματος.

Η αναλογική επαυξητική φόρτιση μιας επανάληψης μέσα στο βήμα φόρτισης i ορίζεται από τη σχέση

$$\Delta R = \Delta \lambda \bar{R} \quad , \quad \Delta \lambda = \lambda - \lambda^i \quad (5.29\alpha, \beta)$$

Και η αντίστοιχη προσαύξηση της μετατόπισης από τη σχέση

$$\Delta x = x - x^i \quad (5.30)$$

Το σφαιρικό μήκος τόξου θεωρείται μία από τις πλέον αξιόπιστες δεσμεύσεις από την οποία προκύπτει το $\Delta \lambda$:

$$\Delta x^T \Delta x + \Delta \lambda^2 \psi^2 \bar{R}^T \bar{R} = s^2 \quad (5.31)$$

Όπου η σταθερά s μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το μέγεθος του γενικευμένου διανύσματος

$$s = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \psi \bar{R} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

το οποίο και καθορίζει τη γενικευμένη σφαίρα η οποία αποτελεί την επιφάνεια όπου δεσμεύεται να κινείται η επαυξητική φόρτιση καθώς οδεύει προς τη μη γραμμική λύση του προβλήματος. Ο όρος ψ είναι ένας συντελεστής ο οποίος επιβάλλει τη συμβατότητα των μονάδων.

Η μέθοδος Newton-Raphson των σχέσεων διατυπώνεται τώρα ως εξής :

$$K_T(x_k) u_{k+1} = -r(x_k, \lambda_{k+1}) \quad (5.33)$$

όπου

$$r(x_k, \lambda_{k+1}) = F(x_k) - (R(x_k) + \gamma_k \bar{R}) \quad (5.34)$$

$$x_{k+1} = x_k + u_{k+1} \quad , \quad \Delta x_{k+1} = \Delta x_k + u_{k+1} \quad (5.35\alpha, \beta)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \gamma_k \quad , \quad \Delta \lambda_{k+1} = \Delta \lambda_k + \gamma_k \quad (5.36\alpha, \beta)$$

με $\Delta x_0 = \Delta \lambda_0 = 0$. Η επίλυση της εξίσωσης θα δώσει την προσαύξηση \mathbf{u}_{k+1} συναρτήσει της άγνωστης ποσότητας γ_k :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}'_{k+1} + \gamma_k \mathbf{u}''_{k+1} \quad (5.37)$$

όπου

$$\mathbf{u}'_{k+1} = -(\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_k))^{-1} (\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)) \quad (5.38)$$

$$\mathbf{u}''_k = (\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_k))^{-1} \bar{\mathbf{R}} \quad (5.39)$$

Οι ποσότητες \mathbf{u}_{k+1} και γ_k θα πρέπει επίσης να ικανοποιούν την εξίσωση-περιορισμό:

$$(\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1})^T (\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1}) + (\Delta \lambda_k + \gamma_k)^2 \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = s^2 \quad (5.40)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς γ_k της μορφής

$$\alpha_1 \gamma_k^2 + \alpha_2 \gamma_k + \alpha_3 = 0 \quad (5.41)$$

με τους παρακάτω συντελεστές

$$\alpha_1 = (\mathbf{u}'_{k+1})^T \mathbf{u}'_{k+1} + \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} \quad (5.42\alpha)$$

$$\alpha_2 = 2(\mathbf{u}''_k)^T (\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}'_{k+1}) + 2\Delta \lambda_k \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} \quad (5.42\beta)$$

$$\alpha_3 = (\mathbf{u}''_{k+1})^T (2\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}''_{k+1}) \quad (5.42\gamma)$$

Οι δύο λύσεις $\gamma_k^{(1)}$ και $\gamma_k^{(2)}$ που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης ορίζουν δύο γενικευμένα διανύσματα $\mathbf{s}_{k+1}^{(1)}, \mathbf{s}_{k+1}^{(2)}$. Η λύση που τελικά επιλέγεται είναι εκείνη που σχηματίζει τη μικρότερη γωνία θ ως προς το γενικευμένο διάνυσμα \mathbf{s}_k :

$$\cos \theta^{(j)} = \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_{k+1}^{(j)}}{s^2} \quad (5.43)$$

με

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \lambda_k \psi \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_{k+1}^{(j)} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1}^{(j)} \\ (\Delta \lambda_k + \gamma_k^{(j)}) \psi \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}, \quad j=1,2 \quad (5.44)$$

Η παράμετρος ψ μπορεί να πάρει την τιμή $\psi=0$ ή $\psi=1$ στην περίπτωση που το διάνυσμα της φόρτισης \bar{R} είναι κανονικοποιημένο οπότε ο δεύτερος όρος της εξίσωσης γίνεται Δl^2 .

5.17 Γενικές παρατηρήσεις μη γραμμικής ανάλυσης

Πριν από οποιαδήποτε μη γραμμική ανάλυση θα πρέπει να προηγηθεί μία γραμμική ανάλυση η οποία θα βοηθήσει να αποκαλυφθούν ως ένα βαθμό το είδος των μη γραμμικοτήτων που θα αναπτυχθούν κατά τη φόρτιση και ο τρόπος που θα πρέπει να αντιμετωπιστούν. Η μη γραμμική ανάλυση θα πρέπει στη συνέχεια να γίνει σταδιακά ξεκινώντας από ένα αραιό δίκτυο στοιχείων και σε επόμενο στάδιο να διακριτοποιηθεί ο φορέας με ένα αρκούντως πυκνό δίκτυο στοιχείων. Αυτό ενδείκνυται για την αποφυγή σφαλμάτων που οφείλονται στην προσομοίωση ή στην εισαγωγή των δεδομένων και για να δοθεί η δυνατότητα στον μηχανικό-αναλυτή να έχει, σε σύντομο χρονικό διάστημα, μία πρώτη εκτίμηση της συμπεριφοράς της κατασκευής χωρίς να χρειαστεί να επεξεργαστεί και να ερμηνεύσει ένα μεγάλο όγκο πληροφοριών που συνήθως παράγονται κατά τις μη γραμμικές αναλύσεις. Θα πρέπει επίσης να ληφθούν υπόψη οι μη γραμμικότητες χωριστά στην αρχή επιλέγοντας κατάλληλες μη γραμμικές διατυπώσεις και μοντέλα του υλικού.

Κατά τη μη γραμμική ανάλυση απαιτείται μεγαλύτερη προσοχή στην επιλογή της τάξης της αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μητρώων και διανυσμάτων που υπεισέρχονται στις μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας. Για την περίπτωση της γεωμετρικής μη γραμμικής ανάλυσης η τάξη της ολοκλήρωσης θα πρέπει να είναι τουλάχιστον του ίδιου βαθμού με εκείνη που απαιτείται για τη γραμμική ανάλυση.

Στη μη γραμμικότητα του υλικού, όμως, απαιτείται συνήθως μεγαλύτερη τάξη ολοκλήρωσης από εκείνη της γραμμικής ανάλυσης προκειμένου να αποτυπωθεί με ακρίβεια η έναρξη και η μετάδοση της μη γραμμικής συμπεριφοράς στο εσωτερικό του φορέα. Αυτό συμβαίνει διότι η μη γραμμικότητα του υλικού υπολογίζεται μόνο στα

σημεία ολοκλήρωσης με αποτέλεσμα να μη καθίσταται δυνατή η ακριβής προσομείωση όταν χρησιμοποιείται χαμηλής τάξεως αριθμητική ολοκλήρωση.

Στην περίπτωση της μη γραμμικής ανάλυσης του υλικού σε δοκούς, πλάκες και κελύφη η ολοκλήρωση κατά Newton-Cotes είναι προτιμητέα διότι τα σημεία ολοκλήρωσης στην περίπτωση Newton-Cotes βρίσκονται στα σύνορα των στοιχείων (π.χ. στην πάνω και κάτω επιφάνεια ενός κελύφους) από τα οποία γίνεται η έναρξη της μη γραμμικής συμπεριφοράς.

6

Μη γραμμική – ελαστοπλαστική ανάλυση με το στοιχείο Tric

6.1 Ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο στο φυσικό σύστημα

Το φυσικό ελαστοπλαστικό μητρώο ακαμψίας έχει την ίδια μορφή με το ελαστικό μητρώο ακαμψίας. Η επαυξητική σχέση τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων στο φυσικό σύστημα, σε ένα βήμα φόρτισης, δίνεται από τη σχέση:

$$d\sigma_c^k = \kappa_{ct}^{e-pl} d\gamma_t^k \quad (6.1)$$

και ισχύει για κάθε στρώση k . Το υλικό στην αρχική του κατάσταση είναι ισότροπο. Επισημαίνεται ότι όταν το υλικό βρίσκεται στην ελαστική περιοχή οι όροι σύζευξης μεμβρανικής – καμπτικής ακαμψίας μηδενίζονται. Αυτό δεν ισχύει όταν το υλικό βρίσκεται στην ελαστοπλαστική περιοχή, λόγω της προοδευτικής διάδοσης της πλαστικότητας κατά μήκος του πάχους του στοιχείου. Στη συνέχεια για ευκολία παραλείπεται ο δείκτης k , ενώ όλα τα μεγέθη αναφέρονται στο φυσικό σύστημα.

Η κύρια παραδοχή που γίνεται για την μόρφωση του ελαστοπλαστικού μητρώου ακαμψίας στηρίζεται στο διαχωρισμό της επαυξητικής ανηγμένης παραμόρφωσης σε ελαστικό και πλαστικό μέρος

$$d\gamma_t = d\gamma_t^e + d\gamma_t^{pl} \quad (6.2)$$

Η επαυξητική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$d\sigma_c = \kappa_{ct}^{el} d\gamma_t - \kappa_{ct}^{el} d\gamma_t^{pl} \quad (6.3)$$

όπου κ_{ct}^e είναι το ελαστικό καταστατικό μητρώο στο φυσικό σύστημα και δίνεται από τη σχέση (4.30). Η επαυξητική πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση γράφεται

$$d\gamma_t^{pl} = d\bar{\gamma}_t^{pl} s_N \quad (6.4)$$

όπου $d\bar{\gamma}_t^{pl}$ είναι η ισοδύναμη πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση (equivalent plastic strain) και s_N είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια διαρροής

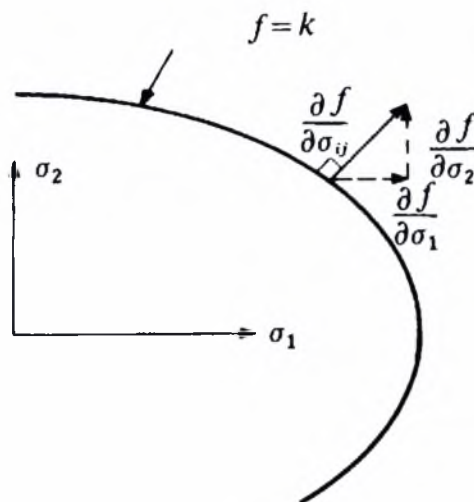
$$s_N^t = \frac{\partial F}{\partial \sigma_\epsilon} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ca}} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{cb}} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{cy}} \right] - \text{Σχήμα 6.1- και ορίζεται από το νόμο πλαστικής ρο-}$$

ής. Συνεπώς η επαυξητική τάση γράφεται:

$$d\sigma_\epsilon = \kappa_{ct}^{el} d\gamma_t - \kappa_{ct}^{el} d\bar{\gamma}_t^{pl} s_N \quad (6.5)$$

Η επιφάνεια διαρροής στην περίπτωση του κριτηρίου διαρροής Von Mises δίνεται από τη σχέση:

$$F(\sigma_\epsilon, \bar{\gamma}_t^{pl}) = \bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\gamma}_t^{pl}) = 0 \quad (6.6)$$



Σχήμα 6.1 Κάθετο διάνυσμα $s_N (= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}})$ στην επιφάνεια διαρροής f

Η $\bar{\sigma}$ είναι η ισοδύναμη τάση διαρροής η οποία ορίζεται αναλυτικά από την πιο κάτω σχέση:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \sigma_\epsilon^t \left[A - \frac{1}{3} E_3 \right] \sigma_\epsilon \quad (6.7)$$

όπου

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta \\ \cos^2 \alpha & 1 & \cos^2 \gamma \\ \cos^2 \beta & \cos^2 \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

με α , β και γ , οι γωνίες του τριγώνου.

Το διάνυσμα της πλαστικής ροής s_N δίνεται από τη σχέση:

$$s_N = \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[A - \frac{1}{3} ee^t \right] \sigma_c \quad (6.10)$$

όπου

$$e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

Όταν το υλικό περάσει στην πλαστική περιοχή $\sigma_c > \sigma_y$, η επαυξητική τάση συνδέεται με την πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση μέσω του μέτρου κράτυνσης $H(\bar{\epsilon}_p)$.

$$H(\bar{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma_c}{d\gamma_i^{pl}} \quad (6.12)$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση του κριτηρίου διαρροής έχουμε:

$$\begin{aligned} dF(\sigma_c, \bar{\gamma}_i^{pl}) &= d(\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\gamma}_i^{pl})) = \frac{\partial(\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\gamma}_i^{pl}))}{\partial \sigma_c} d\sigma_c + \frac{\partial(\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\gamma}_i^{pl}))}{\partial \bar{\gamma}_i^{pl}} d\bar{\gamma}_i^{pl} = 0 \\ &= s_N^t d\sigma_c - A' d\bar{\gamma}_i^{pl} = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

όπου

$$A' = - \frac{\partial(\bar{\sigma} - \sigma_y(\bar{\gamma}_t^{pl}))}{\partial \bar{\gamma}_t^{pl}} = H \quad (6.14)$$

Λύνοντας τη σχέση (6.12) ως προς $d\bar{\gamma}_t^{pl}$ παίρνουμε:

$$d\bar{\gamma}_t^{pl} = \frac{1}{H} s_N^t d\sigma_c \geq 0 \quad (6.15)$$

Η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση μπορεί να εκφραστεί ως προς το επαυξητικό διάνυσμα των φυσικών παραμορφώσεων. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.5) στην (6.15) έχουμε:

$$d\bar{\gamma}_t^{pl} = \frac{1}{H + s_N^t \kappa_{ct}^e s_N} s_N^t \kappa_{ct}^e d\gamma_t \geq 0 \quad (6.16)$$

Τελικά με την αντικατάσταση των σχέσεων προκύπτει η αναλυτική έκφραση της σχέσης (6.3):

$$d\sigma_c^k = \left[\kappa_{ct}^e - \frac{1}{H + s_N^t \kappa_{ct}^e s_N} (\kappa_{ct}^e s_N)(\kappa_{ct}^e s_N)^t \right]^k d\gamma_t^k \quad (6.17)$$

The diagram shows a box containing the term κ_{ct}^{e-pl} . An arrow points from this box to the term κ_{ct}^e in the matrix expression above it, indicating a substitution.

όπου κ_{ct}^{e-pl} είναι το ελαστοπλαστικό μητρώο ακαμψίας στο φυσικό σύστημα για κάθε στρώση k.

$$\kappa_{ct}^{e-pl} = \left[\kappa_{ct}^e - \frac{1}{H + s_N^t \kappa_{ct}^e s_N} (\kappa_{ct}^e s_N)(\kappa_{ct}^e s_N)^t \right]^k \quad (6.18)$$

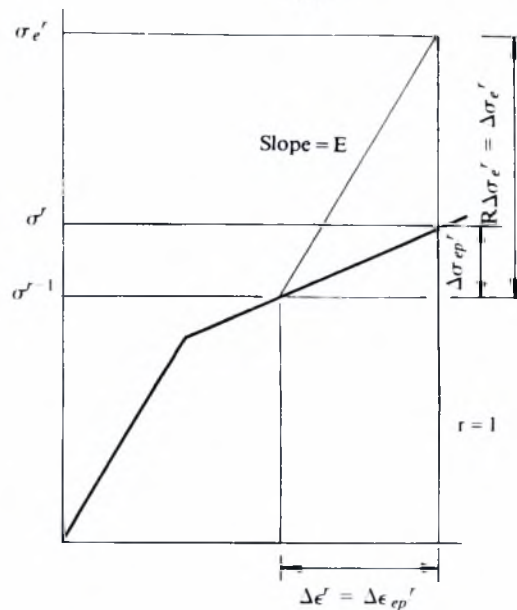
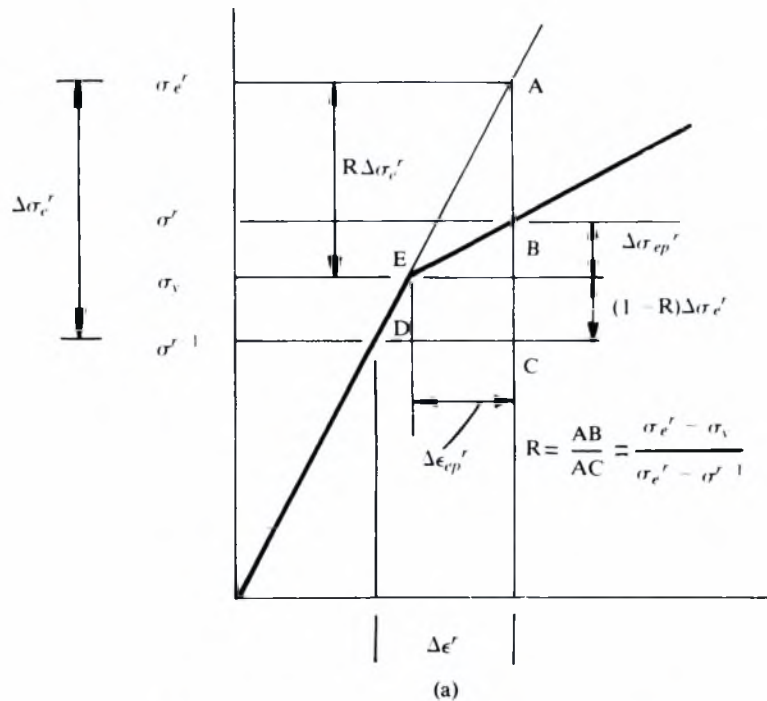
Οι όροι του επαυξητικού διανύσματος $d\gamma_t$ δίνονται:

$$d\gamma_{ti} = d\gamma_{ti}^0 + d\psi_{si} \frac{z_i}{l_i}, i=\alpha, \beta, \gamma \quad (6.19)$$

Μετά τον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας κάθε στρώσης, μορφώνεται το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου, μετασχηματίζεται στο τοπικό και στη συνέχεια στο καθολικό σύστημα όπου γίνεται η μόρφωση του μητρώου ακαμψίας του φορέα. Το φυ-

σικό ελαστοπλαστικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου προκύπτει αθροίζοντας τα ελαστοπλαστικά μητρώα δυσκαμψίας κάθε στρώσης του στοιχείου.

$$k_N^{\text{el-pl}} = \sum_{k=1}^n (\alpha_N^t k_{\text{el}}^{\text{el-pl}} \alpha_N) \quad (6.20)$$



Σχήμα 6.2 Επαυξήσεις τάσεων και παραμορφώσεων για ελαστοπλαστικό υλικό.

- (a) Μόλις το υλικό μπαίνει στη διαρροή.
- (b) Το υλικό έχει ήδη διαρρεύσει.

6.2 Ισοδύναμη τάση διαρροής και διάνυσμα πλαστικής ροής στο φυσικό σύστημα

Από την πιο πάνω διαδικασία φαίνεται ότι για την ελαστοπλαστική ανάλυση στο φυσικό σύστημα απαιτείται ο μετασχηματισμός των μεγεθών $\bar{\sigma}$ και s_N **από το σύστημα του υλικού στο φυσικό σύστημα**. Στη συνέχεια γίνεται ο αναλυτικός υπολογισμός των μεγεθών αυτών.

6.2.1 Ισοδύναμη τάση διαρροής $\bar{\sigma}$

Πειραματικές παρατηρήσεις έδειξαν ότι η εντατική κατάσταση σ' ένα φορτιζόμενο σώμα, είναι ανεξάρτητη από την προσθήκη υδροστατικής πίεσης. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε τον υδροστατικό ταυυστή από τον ταυυστή των τάσεων $\delta_{ij}p$, ($p=(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3$) οπότε καταλήγουμε στον αποκλίνοντα ταυυστή των τάσεων σ_D .

$$\sigma_{Dij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} p \quad (6.21)$$

όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, το δ του Kronecker

$$\text{ή} \quad \sigma_D = \mu'_D \sigma_{12} \quad (6.22)$$

$$\text{όπου} \quad \mu'_D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$$\text{και} \quad \mu_D = [I_3] - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0^t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

και σ_{12} ο ταυυστής των τάσεων στο σύστημα του υλικού 123.

$$\{\sigma_{12}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12}\sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Η δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων I_{2D} , δίνεται από τη σχέση:

$$I_{2D} = \frac{3}{2} \sigma_D' \sigma_D = \frac{3}{2} (\mu_D' \sigma_{12})' (\mu_D' \sigma_{12}) = \frac{3}{2} \sigma_{12}' \mu_D'' \mu_D' \sigma_{12} \quad (6.26)$$

Ο πολλαπλασιασμός των μητρών μ_D' και μ_D'' δίνει:

$$\mu_D'' \cdot \mu_D' = \mu_D \quad (6.27)$$

Οι τάσεις από το σύστημα του υλικού μετασχηματίζονται στο φυσικό σύστημα μέσω της σχέσης:

$$\sigma_{12} = (B^{-1} A_p')^{-1} \sigma_c = A_p^{-1} B \sigma_c \quad (6.28)$$

όπου τα μητρώα B και A_p δίνονται στις σχέσεις (4.16) και (4.48) αντίστοιχα στο Κεφάλαιο 4. Το μητρώο A_p είναι μοναδιαίο, γιατί για την περίπτωση ισότροπου υλικού το σύστημα του υλικού και το τοπικό σύστημα ταυτίζονται. Τελικά η σχέση (6.26) γράφεται:

$$I_{2D} = \frac{3}{2} \sigma_{12}' \mu_D' \mu_D \sigma_{12} = \frac{3}{2} (B \sigma_c)' \mu_D (B \sigma_c) = \frac{3}{2} \sigma_c' B' \mu_D B \sigma_c \quad (6.29)$$

Ο πολλαπλασιασμός $B' \mu_D B$ δίνει:

$$B' \mu_D B = B' \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] B = A - \frac{1}{3} E_3 \quad (6.30)$$

Τα μητρώα A και E_3 έχουν ορισθεί στις σχέσεις (6.8) και (6.9) αντίστοιχα. Για την περίπτωση του κριτηρίου διαρροής Von Mises η ισοδύναμη τάση ταυτίζεται με την τετραγωνική ρίζα της δεύτερης αναλλοίωτης.

$$\bar{\sigma}^2 = I_{2D} \Rightarrow \bar{\sigma} = \sqrt{I_{2D}} \quad (6.31)$$

6.2.2 Πλαστικό διάνυσμα ροής s_N

Το διάνυσμα πλαστικής ροής ορίζεται ως:

$$s_N = \frac{\partial(\bar{\sigma} - \sigma_y)}{\partial \sigma_c} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_c} \quad (6.32)$$

Με παραγωγή της σχέσης $\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \sigma_c^t \left[A - \frac{1}{3} E_3 \right] \sigma_c$ (6.7) και λαμβάνοντας υπόψη τον πιο

κάτω κανόνα παραγωγής μητρώων

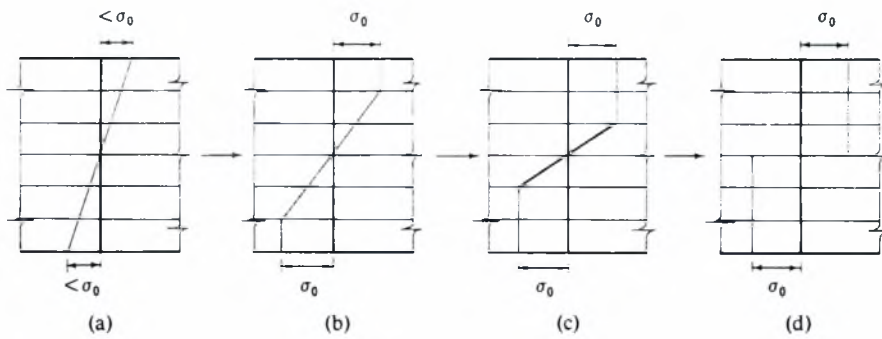
$$\begin{aligned} f &= x^t a x \\ \frac{\partial f}{\partial x^t} &= [a + a^t] x = 2ax, \quad a = a^t \\ x &= \{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\} \end{aligned}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_c} &= \frac{3}{2} \left[\left[A - \frac{1}{3} E_3 \right] + \left[A - \frac{1}{3} E_3 \right]^t \right] \sigma_c \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[A - \frac{1}{3} E_3 \right] \sigma_c \end{aligned} \quad (6.33)$$

6.3 Μαθηματική διαδικασία ελαστοπλαστικής ανάλυσης

Στη διάρκεια επιβολής μιας αύξησης του φορτίου, τα στοιχεία που διακριτοποιούν το φορέα μπορεί να περάσουν πλήρως ή μερικώς στην πλαστική περιοχή. Οι τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται στο μέσο κάθε στρώσης. Κατά συνέπεια ένα στοιχείο μπορεί να συμπεριφέρεται μερικώς ελαστικά και μερικώς ελαστοπλαστικά αν μερικές στρώσεις του στοιχείου περάσουν στην πλαστική περιοχή, ή πλήρως πλαστικά αν όσες οι στρώσεις διαρρεύσουν. Για κάθε αύξηση του φορτίου είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της ελαστικής και πλαστικής παραμόρφωσης και στη συνέχεια ο υπολογισμός των τάσεων και παραμορφώσεων ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο διαρροής και η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων του υλικού.



Σχήμα 6.3 Διαρροή στρωσιγενούς υλικού

Η διαδικασία που υιοθετείται στην παρούσα εργασία είναι η ακόλουθη:

- Έστω ότι βρισκόμαστε στην i επανάληψη του m επαυξητικού βήματος φόρτισης. Το διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης είναι το διάνυσμα των παραμενουσών δράσεων g_{i-1} της προηγούμενης επανάληψης. Οι δυνάμεις αυτές οδηγούν σε αύξηση των μετατοπίσεων dp_N και των αξονικών μορφών $d\gamma_i$.
- Υποθέτοντας ελαστική συμπεριφορά υπολογίζονται η επαυξητική τάση και η συνολική τάση στο μέσο κάθε στρώσης του στοιχείου

$$\begin{aligned} d\sigma_{ce}^i &= \kappa_{ct} d\gamma_i^i \\ \sigma_{ce}^i &= \sigma_c^{i-1} + \kappa_{ct} d\gamma_i^i \end{aligned} \quad (6.34)$$

όπου σ_c^{i-1} είναι η τάση στην προηγούμενη επανάληψη. Η τάση αυτή βρίσκεται πάνω ή εντός της επιφάνειας διαρροής. Ο δείκτης e δείχνει ότι οι τάσεις υπολογίστηκαν ελαστικά.

- Το επόμενο βήμα εξαρτάται από την κατάσταση στην οποία βρισκόταν η εξεταζόμενη στρώση στην προηγούμενη επανάληψη. Εξετάζεται ποιο μέρος της επαυξητικής τάσης είναι πλαστικό και ποιο ελαστικό και η περίπτωση αποφόρτισης της στρώσης $\bar{\gamma}_i^{pl} < 0$. Η συνολική τάση υπολογίζεται όπως φαίνεται στα Σχήματα 6.4(α) και 6.4(β) μέσω της σχέσης:

$$\sigma_c^i = \sigma_c^{i-1} + d\sigma_{ce} - d\bar{\gamma}_i^{pl} \kappa_{ct} s_N \quad (6.35)$$

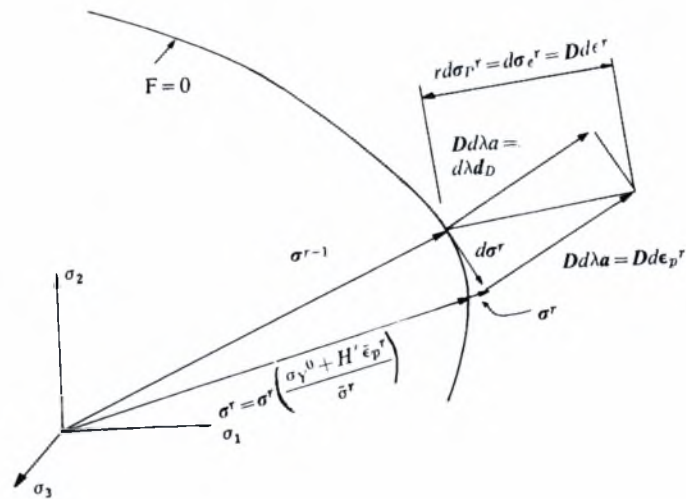
και οι εσωτερικές δυνάμεις από τη σχέση:

$$P_N^i = k_N^{el-pl} p_N$$

(6.36)

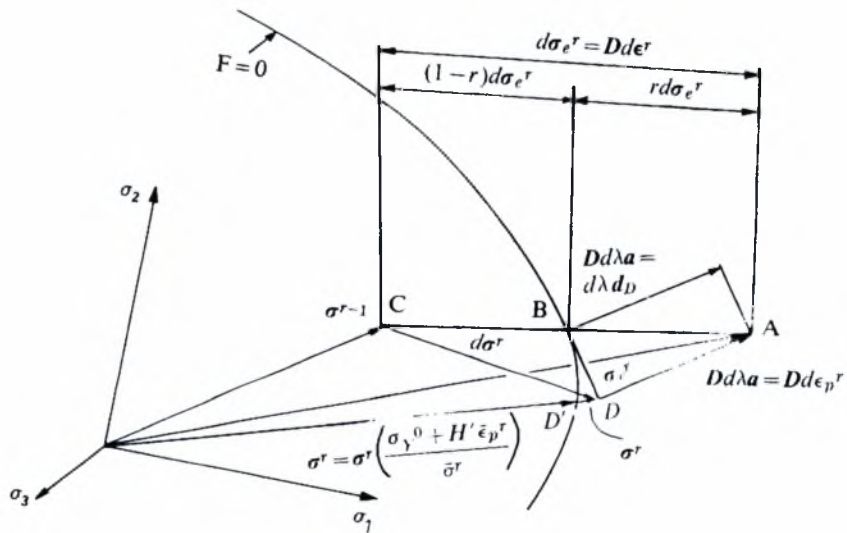
Στη συνέχεια η τάση πολλαπλασιάζεται με ένα διορθωτικό συντελεστή R ώστε να βρίσκεται πάντα πάνω στην επιφάνεια διαρροής.

NAI		OXI	
Δηλαδή η στρώση είχε διαρρεύσει από το προηγούμενο βήμα. Ελέγχουμε εάν $\sigma_e^r > \sigma^{r-1}$. Αν η απάντηση είναι :		Δηλαδή η στρώση δεν είχε διαρρεύσει από το προηγούμενο βήμα. Ελέγχουμε εάν $\sigma_e^r > \sigma^{r-1}$. Αν η απάντηση είναι :	
OXI	NAI	OXI	NAI
Η στρώση βρίσκεται στην απόφωρτιση η οποία σύμφωνα με τη θεωρία πλαστικότητας γίνεται ελαστικά.	Η τάση από την προηγούμενη επανάληψη ήταν μεγαλύτερη της επιτρεπόμενης και εξακολουθεί να αυξάνεται. Έτσι η επιπλέον τάση $\sigma_e^r - \sigma^{r-1}$ πρέπει να ελαττωθεί στην τιμή της τάσεως διαρροής. Ο συντελεστής R που καθορίζει το ποσοστό της τάσεως που πρέπει να διορθωθεί ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο διαρροής είναι ίσος με 1.	Η στρώση εξακολουθεί να είναι εντός της ελαστικής περιοχής.	Η διαρροή λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της αύξησης του φορτίου που αντιστοιχεί σε αυτό το βήμα. Το μέρος της τάσεως που είναι μεγαλύτερο από αυτό που αντιστοιχεί στην τάση διαρροής πρέπει να μειωθεί κατάλληλα. Έτσι ο συντελεστής R με τη βοήθεια του σχ 6.2. γίνεται: $R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma_e^r - \sigma_Y}{\sigma_e^r - \sigma^{r-1}}$



Σχήμα 6.4(α) Υπολογισμός τάσης στην επανάληψη $i(=r)$. Το ελεγχόμενο σημείο στην επανάληψη $r-1$ είχε περάσει στην πλαστική περιοχή.

Όπου: $\sigma^{r-1} = \sigma_c^{i-1}$, $D = \kappa_{ct}$, $d\lambda = d\bar{\gamma}_t^{pl}$, $\alpha = s_N$



Σχήμα 6.4(β) Υπολογισμός τάσης στην επανάληψη $i(=r)$. Το ελεγχόμενο σημείο στην επανάληψη $r-1$ συμπεριφερόταν ελαστικά.

Όπου: $\sigma^{r-1} = \sigma_c^{i-1}$, $D = \kappa_{ct}$, $d\lambda = d\bar{\gamma}_t^{pl}$, $\alpha = s_N$

6.4 Εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας

Έστω ότι στην κατασκευή επιβάλλεται φορτίο \mathbf{P} το οποίο οδηγεί σε παραμόρφωση \mathbf{u} της κατασκευής. Με βάση τη θεωρία μεγάλων μετατοπίσεων αλλά μικρών παραμορφώσεων, η εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής γράφεται:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (6.37)$$

όπου \mathbf{K}_T είναι το καθολικό εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{K}_T = [\mathbf{T}_{06}^t [\bar{\mathbf{a}}_N^t [\mathbf{k}_N^{e-pl}] \bar{\mathbf{a}}_N] \mathbf{T}_{06}] + [\mathbf{T}_{06}^t \bar{\mathbf{k}}_G \mathbf{T}_{06}] + [\bar{\mathbf{a}}_N \mathbf{T}_{06}]^t \mathbf{k}_{NG} [\bar{\mathbf{a}}_N \mathbf{T}_{06}] \quad (6.38)$$

Το πιο πάνω μητρώο αναφέρεται στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη τόσο η γεωμετρική μη γραμμικότητα όσο και η μη γραμμικότητα του υλικού. Στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη μόνο η γεωμετρική μη γραμμικότητα τότε τη θέση του μητρώου \mathbf{k}_N^{e-pl} παίρνει το ελαστικό μητρώο \mathbf{k}_N , ενώ στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη μόνο η μη γραμμικότητα του υλικού, τότε το εφαπτομενικό μητρώο της σχέσης 6.36 περιγράφεται μόνο από τον πρώτο όρο.

Στο παραπάνω εφαπτομενικό μητρώο εμφανίζονται τα μητρώα $\bar{\mathbf{k}}_G$ και \mathbf{k}_{NG} τα οποία θα ορισθούν σε αυτή τη παράγραφο. Το $\bar{\mathbf{k}}_G$ αποτελεί τη γεωμετρική δυσκαμψία. Πιο συγκεκριμένα, η γεωμετρική ακαμψία που βασίζεται στη θεωρία των μεγάλων μετακινήσεων και των μικρών ανηγμένων παραμορφώσεων, παράγεται από τις μετακινήσεις του στοιχείου ως στερεό σώμα και κυρίως από τις στροφές ως στερεό σώμα. Για αυτό η γεωμετρική ακαμψία περιλαμβάνει όλες εκείνες τις φυσικές δυνάμεις οι οποίες παράγουν στροφές.

Για να κατασκευαστεί το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας θα πρέπει να εστιαστεί η προσοχή στις μικρές περιστροφικές κινήσεις του στοιχείου ως στερεό σώμα στο καρτεσιανό τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x'y'z'$ που όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4 αυτές αποδίδονται από το μητρώο: $d\mathbf{p}_0^2 = \{d\mathbf{p}_{04} \quad d\mathbf{p}_{05} \quad d\mathbf{p}_{06}\}^t$. Αυτές οι στροφές στερεού σώματος περιέχουν επικόμβιες ροπές $d\mathbf{M}_0$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι όλες οι

δυνάμεις που παράγονται από τις συνολικές μετακινήσεις στερεού σώματος πρέπει να μηδενιστούν, η έκφραση του dM_0 καταλήγει στην εξής σχέση:

$$dM_0 = \bar{k}_{GR} dp_0^2 \quad (6.39)$$

(3x1) (3x3) (3x1)

όπου \bar{k}_{GR} είναι το τοπικό στρωφικό στερεού σώματος μητρώο δυσκαμψίας. Το μητρώο αυτό παίρνει την εξής απλή αναλυτική μορφή:

$$\bar{k}_{GR} = \begin{bmatrix} \frac{P_a y_a^2}{I_a^2} + \frac{P_\beta y_\beta^2}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma y_\gamma^2}{I_\gamma^2} & -\left(\frac{P_a x_a y_a}{I_a^2} + \frac{P_\beta x_\beta y_\beta}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma x_\gamma y_\gamma}{I_\gamma^2} \right) & 0 \\ -\left(\frac{P_a x_a y_a}{I_a^2} + \frac{P_\beta x_\beta y_\beta}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma x_\gamma y_\gamma}{I_\gamma^2} \right) & \frac{P_a x_a^2}{I_a^2} + \frac{P_\beta x_\beta^2}{I_\beta^2} + \frac{P_\gamma x_\gamma^2}{I_\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & P_a + P_\beta + P_\gamma \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

όπου P_a, P_β, P_γ είναι οι μέσου επιπέδου αξονικές φυσικές δυνάμεις και όπως έχει οριστεί και στο Κεφάλαιο 4:

$$\begin{aligned} x_a &= l_a c_{ax} = x'_3 - x'_2, & y_a &= l_a c_{ay} = y'_3 - y'_2 \\ x_\beta &= l_\beta c_{\beta x} = x'_1 - x'_3, & y_\beta &= l_\beta c_{\beta y} = y'_1 - y'_3 \\ x_\gamma &= l_\gamma c_{\gamma x} = x'_2 - x'_1, & y_\gamma &= l_\gamma c_{\gamma y} = y'_2 - y'_1 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Συνεπώς η μεταφορά του φυσικού γεωμετρικού μητρώου δυσκαμψίας από το τοπικό, στο καθολικό σύστημα γίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\bar{k}_G = \bar{a}_{0R}^T \bar{k}_{GR} \bar{a}_{0R} \quad (6.42)$$

(18x18) (18x3) (3x3) (18x3)

όπου \bar{a}_{0R} το μητρώο που «μεταφέρει» τις μετακινήσεις και τις στρώφες από το φυσικό στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως εξής:

$$p_0^2 = \bar{a}_{0R} \bar{p} \quad (6.43)$$

Το μητρώο \bar{k}_G ονομάζεται απλουστευμένο γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ο όρος αυτός αναφέρεται στο γεγονός ότι μόνο οι μέσες αξονικές φυσικές δυνάμεις περιλαμβάνονται μέσα στο μητρώο αυτό το ο-

ποίο παρουσιάζει τη προφοριστική κατάσταση μέσα στο υλικό. Το μητρώο αυτό, βέβαια, μπορεί να γραφτεί και στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων με την βοήθεια των μητρώων περιστροφής T_0

$$K_G = T_{06}^T \bar{k}_G T_{06} \quad (6.44)$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω σχεδόν όλο το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας προέρχεται από τις στρωφικές κινήσεις του στοιχείου (εκτός και αν οι διαστάσεις του στοιχείου είναι πολύ μεγάλες όπου τότε και οι μεταφορικές κινήσεις είναι σημαντικές κάτι το οποίο πρέπει να αποφεύγεται). Ωστόσο σε καμπτικά φαινόμενα όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3 περί θεωρίας των κελυφών, αρκετά συχνά οι μεμβρανικές δυνάμεις είναι αρκετά μεγάλες και σε αυτή τη περίπτωση αξίζει να προστεθεί ένα φυσικό μητρώο δυσκαμψίας k_{NG} το οποίο θα προέρχεται από τη σύζευξη αξονικών δυνάμεων και συμμετρικά καμπτικά μορφών. Αυτό το φυσικό μητρώο δυσκαμψίας περιλαμβάνει το ακόλουθο διαγώνιο μητρώο

$$k_{NG} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & P_\alpha & \cdot & P_\beta & \cdot & P_\gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

και στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα έχουμε:

$$K_{NG} = [\bar{\alpha}_N T_{06}]^T k_{NG} [\bar{\alpha}_N T_{06}] \quad (6.46)$$

6.5 Ανεύρεση καμπύλης φορτίου-μετατόπισης

6.5.1 Μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc-length method)

Στη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου, η κατασκευή φορτίζεται με φορτίο $\lambda \mathbf{P}$, όπου \mathbf{P} είναι το σταθερό εξωτερικό φορτίο -φορτίο βάσης- και λ είναι ο φορτικός συντελεστής. Αν με δ συμβολίζεται ο αριθμός της επαύξησης του φορτίου και με i ο αριθμός της μη γραμμικής επανάληψης στην οποία βρισκόμαστε στο \mathbf{m} βήμα, έχουμε:

$$\mathbf{P}_{i+1}^m = \mathbf{P}_i^m + \delta \lambda \mathbf{P} \quad (6.47)$$

Σε κάθε επανάληψη, ορίζεται η παράμετρος δλ έτσι ώστε το φορτίο να αυξάνει προοδευτικά ανάλογα με την επέκταση της μη γραμμικότητας στο φορέα. Η εξίσωση ισορροπίας σε κάθε επανάληψη γράφεται:

$$K_i^m x_i = P_{i+1}^m - F_i^m \quad (6.48)$$

όπου F_i^m είναι το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων. Το διάνυσμα των παραμενουσών δράσεων είναι:

$$g_i = F_i^m - P_i \quad (6.49)$$

Το διάνυσμα της μετατόπισης x σε κάθε επανάληψη δίνεται από τη σχέση:

$$x_i = \delta\lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c \quad (6.50)$$

Το διάνυσμα των μετατοπίσεων της πρόλεξης x_i^p είναι:

$$x_i^p = K_{Ti}^{-1} P \quad (6.51)$$

ενώ το διορθωτικό διάνυσμα των μετατοπίσεων x_i^c είναι:

$$x_i^c = -K_{Ti}^{-1} g_i \quad (6.52)$$

Το επαυξητικό διάνυσμα των μετατοπίσεων στο τέλος της $i+1$ επανάληψης είναι:

$$\Delta u_{i+1} = \Delta u_i + \delta\lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c \quad (6.53)$$

ενώ το συνολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων είναι:

$$u_{i+1} = u_i + \delta\lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c \quad (6.54)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που προτάθηκε από τον Crisfield η ακτίνα σύγκλισης της μεθόδου ΔI (κυλινδρική μέθοδος σταθερού μήκους τόξου) υπολογίζεται από:

$$\Delta u_{i+1}^t \Delta u_{i+1} = \Delta I \quad (6.55)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 6.51 και 6.52 στη σχέση 6.54 προκύπτει η πιο κάτω δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\alpha_1 \delta_{i+1}^2 + \alpha_2 \delta_{i+1} + \alpha_3 = 0, \quad (6.56)$$

όπου

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (x_i^p)^t x_i^p, \\ \alpha_2 &= 2 \left[\Delta u_i + x_i^c \right]^t x_i^p, \\ \alpha_3 &= 2 \left[\Delta u_i + x_i^c \right]^t x_i^c\end{aligned}\quad (6.57)$$

Για την πρώτη αύξηση του φορτίου, το δl_1 δίνεται σαν δεδομένο του προβλήματος και χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η ακτίνα του μήκους τόξου Δl , η οποία παραμένει σταθερή σε όλη της διάρκεια της υπολογιστικής διαδικασίας. Για τις επόμενες αυξήσεις το μήκος του τόξου υπολογίζεται από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Η μέθοδος σταθερού μήκους τόξου μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο με τη μέθοδο Newton-Raphson (Standard Newton Raphson) όσο και με τη τροποποιημένη Newton-Raphson (modified Newton-Raphson).

Κατά τη μη γραμμική ανάλυση με τη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου, χρησιμοποιούνται επίσης δύο παράμετροι με τις οποίες προσδιορίζονται οι περιοχές σταθερής και ουδέτερης ισορροπίας, καθώς και οι περιοχές ισχυρής και ασθενής αστάθειας. Οι παράμετροι αυτοί λαμβάνουν υπόψη την ενέργεια της κατασκευής (παράμετρος τρέχουσας ακαμψίας) χρησιμοποιώντας το διάνυσμα μετατοπίσεων της πρόλεξης και το είδος των ιδιοτιμών του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας (θετικές, μηδενικές, αρνητικές αρνητικών ιδιοτιμών κτλ.). Οι πληροφορίες από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του προσήμου της ορίζουσας του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας. Οι παράμετροι αυτοί εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\text{Ενέργεια πρόλεξης } E_p &= u_p^t K_T u_p \\ \text{ή παράμετρος τρέχουσας ακαμψίας } S_p &= x_0^t P \\ \text{ιδιοτιμές, ορίζουσα: } \lambda_n, \text{πρόσημο } (|K_T|)\end{aligned}$$

Οι πιθανοί δρόμοι ισορροπίας είναι οι ακόλουθοι:

- 1 Όταν και η ενέργεια και η πρώτη ιδιοτιμή είναι θετικές, τότε η κίνηση της κατασκευής ονομάζεται σταθερή (stable).
- 2 Όταν η ενέργεια είναι θετική αλλά η πρώτη ιδιοτιμή είναι μηδενική τότε υπάρχει σημείο διακλάδωσης (bifurcation point). Η ύπαρξη και άλλων δρόμων ι-

- σορροπίας εκτός από τον κύριο, εξαρτάται από τον αριθμό των μηδενικών ιδιοτιμών. Πολλές διακλαδώσεις μπορεί να περιλαμβάνουν σταθερές συμμετρικές διακλαδώσεις, μη σταθερές συμμετρικές δρόμους και αντισυμμετρικές διακλαδώσεις.
- 3 Όταν η ενέργεια και η πρώτη ιδιοτιμή είναι και οι δύο μηδενικές, τότε η κατασκευή βρίσκεται σε ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium), ενώ μπορεί να υπάρχουν και άλλοι δρόμοι ισορροπίας. Γενικά, η ύπαρξη μηδενικών ιδιοτιμών δείχνει την ύπαρξη διακλαδώσεων και τη πιθανότητα για δρόμους δευτερεύουσας ισορροπίας.
- 4 Όταν υπάρχουν μία ή περισσότερες αρνητικές ιδιοτιμές στο εφαπτομενικό μητρώο, η κατασκευή κινείται σε ασταθές περιοχές.
- Αν και η ενέργεια και οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές, η κατασκευή κινείται σε ισχυρή ασταθή περιοχή (strongly unstable region).
- Αν η ενέργεια είναι θετική αλλά μία ή περισσότερες ιδιοτιμές είναι αρνητικές, η κατασκευή περνά σε περιοχή ασθενούς αστάθειας (weakly unstable region) και τείνει να αποκτήσει θετική ενέργεια. Συχνά η συμπεριφορά αυτή συνδυάζεται με το φαινόμενο snap-back.

6.5.2 Μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων (displacement control method)

Στη μέθοδο αυτή, επιλέγεται μια μετατόπιση της οποίας η διακύμανση θεωρείται γνωστή. Η μέθοδος που παρουσιάζεται στη συνέχεια, είναι η τροποποιημένη μέθοδος ελέγχου των μετατοπίσεων που προτάθηκε από τους Batoz-Dhatt. Η μέθοδος διαφέρει ως προς τη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου, μόνο ως προς τον υπολογισμό του φορτικού συντελεστή δλ.

Έστω ότι βρισκόμαστε στην i επανάληψη του m επαυξητικού βήματος. \mathbf{P} είναι το φορτίο βάσης και \mathbf{g}_i το διάνυσμα των παραμενουσών δράσεων. Με $u(n)$ συμβολίζουμε τη μετατόπιση στο βαθμό ελευθερίας n με τη γνωστή διακύμανση. Η μέθοδος εκφράζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

Το διάνυσμα της μετατόπισης \mathbf{x} σε κάθε επανάληψη δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{x}_i = \delta\lambda_{i+1} \mathbf{x}_i^p + \mathbf{x}_i^e \quad (6.58)$$

όπου

$$x_i^p = K_{\Pi}^{-1} P \quad (6.59)$$

$$x_i^c = -K_{\Pi}^{-1} g_i \quad (6.60)$$

είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων της πρόλεξης x_i^p και x_i^c είναι το διορθωτικό διάνυσμα των μετατοπίσεων. Το επαυξητικό διάνυσμα των μετατοπίσεων στην i επανάληψη είναι:

$$\Delta u_i = \delta \lambda_i x_i^p + x_i^c \quad (6.61)$$

Η σχέση αυτή ισχύει και για τη επαυξητική μετατόπιση στο βαθμό ελευθερίας n .

$$\Delta u_i(n) = \delta \lambda_i x_i^p(n) + x_i^c(n) \quad (6.62)$$

Η σχέση (6.63) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πρώτου συντελεστή $\delta \lambda$ σε κάθε επαυξητικό βήμα.

$$\delta \lambda_{i=1} = \frac{\Delta u_{i=1}(n) - x_{i=1}^c(n)}{x_{i=1}^p(n)} \quad (6.63)$$

με $\Delta u(n) = m \cdot c$, όπου m το βήμα αύξησης και c η αρχική τιμή της μετατόπισης για την περίπτωση κατά την οποία η μετατόπιση στον συγκεκριμένο βαθμό ελευθερίας αυξάνεται κατά σταθερή ποσότητα σε κάθε επαυξητικό βήμα. Για τις υπόλοιπες επαναλήψεις η $u(n)$ διατηρείται σταθερή, δηλαδή $\Delta u(n)$ είναι μηδενικό και ο συντελεστής $\delta \lambda_{i \neq 1}$ υπολογίζεται από:

$$\delta \lambda_{i \neq 1} = -\frac{x_{i=1}^c(n)}{x_{i=1}^p(n)} \quad (6.64)$$

6.6 Επαυξητική/επαναληπτική διαδικασία

Πριν την επαυξητική /επαναληπτική διαδικασία, τα ακόλουθα βήματα προηγούνται:

1. Υπολογισμός των μητρώων μετασχηματισμού από το τοπικό στο καθολικό σύστημα για κάθε στοιχείο.

2. Υπολογισμός των τοπικών συντεταγμένων κάθε κόμβου.
3. Υπολογισμός των μητρώων μετασχηματισμού από το φυσικό στο τοπικό σύστημα για κάθε στοιχείο.
4. Υπολογισμός του διανύσματος φορτίου

6.7 Αλγόριθμος επίλυσης με τη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου

Ο αλγόριθμος της υπολογιστικής διαδικασίας της μη γραμμικής ανάλυσης συνδυασμένης με τη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου είναι:

Βρόγχος επαναλήψεων **inc**

Βρόγχος μέγιστου αριθμού επαναλήψεων **ite**

*Αν **ite** = 1 ή αν χρησιμοποιείται η μέθοδος επίλυσης Newton-Raphson τότε:

1. Υπολογισμός και μόρφωση του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας του φορέα \mathbf{K}_T
2. Παραγοντοποίηση του μητρώου ακαμψίας \mathbf{K}_T .

*Αν **ite** = 1 γίνεται έλεγχος για την ύπαρξη μηδενικών ή αρνητικών ιδιοτιμών και καθορισμός του προσήμου της ορίζουσας $|\mathbf{K}_T|$. Στην περίπτωση μίας ή περισσότερων μηδενικών ιδιοτιμών γίνεται έλεγχος για κλάδους δευτερεύουσας ισορροπίας.

1 Επίλυση $\mathbf{K}_T \mathbf{x}_0 = \mathbf{P}$.

2 Υπολογισμός $\|\mathbf{x}_0\| = [\mathbf{x}_0^t \mathbf{x}_0]^{1/2}$

-Αν **inc** = 1, υπολογισμός της ακτίνας του μήκους τόξου από $\Delta l = \delta l_1 \|\mathbf{x}_0\|$.

Δl παραμένει σταθερό σε όλη την επαυξητική διαδικασία.

-Αν **inc** \neq 1, υπολογισμός της παραμέτρου της τρέχουσας ακαμψίας (ενέργεια) $S_p = \mathbf{x}_0^t \mathbf{P}$, η οποία χρησιμοποιείται μαζί με τις πληροφορίες που προκύπτουν από την εύρεση των ιδιοτιμών για τον υπολογισμό του προσήμου

του πρώτου φορτικού συντελεστή $\delta l_1 = \pm \left[\frac{\Delta l^2}{\mathbf{x}_0^t \mathbf{x}_0} \right]^{1/2}$.

-Υπολογισμός $\Delta u_i = \delta \lambda_i x_0$ και του φορτικού συντελεστή $\lambda_i = \lambda_0 + \delta \lambda_i$. Πήγαινε στο 1.

*Αν $ite \neq 1$

1 Αν χρησιμοποιείται η μέθοδος επίλυσης Newton-Raphson υπολογίζεται το διάνυσμα μετατοπίσεων της πρόλεξης x^p , επιλύοντας την εξίσωση $K_T x^p = P$ και το διορθωτικό διάνυσμα μετατοπίσεων x^c , επιλύοντας την εξίσωση $K_T x^c = -g$, όπου g είναι οι παραμένουσες δράσεις.

2 Αν χρησιμοποιείται η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson υπολογίζεται μόνο το διορθωτικό διάνυσμα μετατοπίσεων x^c , επιλύοντας την εξίσωση $K_T x^c = -g$.

-Υπολογισμός των συντελεστών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha_1 \delta_{i+1}^2 + \alpha_2 \delta_{i+1} + \alpha_3 = 0$, όπου $\alpha_1 = (x_i^p)^T x_i^p$, $\alpha_2 = 2 [\Delta u_i + x_i^c]^T x_i^p$, $\alpha_3 = 2 [\Delta u_i + x_i^c]^T x_i^c$.

-Επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

-Υπολογισμός των λ και u ως: $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta \lambda_{i+1}$, $\Delta u_{i+1} = \Delta u_i + \delta \lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c$

1.Υπολογισμός της συνολικής μετατόπισης $u_{i+1} = u_i + \delta \lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c$

2.Υπολογισμός νέων συντεταγμένων σημείων

3.Για κάθε στοιχείο, υπολογισμός των επαυξητικών φυσικών μορφών $d\rho_N = 1/2 \bar{\alpha}_N [T_{06b} + T_{06e}] d\rho$, όπου $d\rho = \delta \lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c$. T_{06b} είναι το μητρώο με τα συνημίτονα κατευθύνσεως στην αρχή της επανάληψης και T_{06e} είναι το μητρώο με τα συνημίτονα κατευθύνσεως στο τέλος της επανάληψης.

4.Υπολογισμός επαυξητικών φυσικών δυνάμεων dP_N . Σε κάθε στρώση του στοιχείου υπολογίζεται το επαυξητικό διάνυσμα αξονικών μορφών $dy_i(d\rho_N, \alpha_N, z)$, το διάνυσμα των φυσικών τάσεων υποθέτοντας ελαστική συμπεριφορά σ_e και η ισοδύναμη πλαστική επαυξητική ανηγμένη παραμόρφωση $d\bar{\gamma}_i^{pl}$. Ανάλογα με την παραμορφωσιακή κατάσταση κάθε στρώσης υπολογίζεται το ελαστικό κ_{ci} ή το κ_{ci}^{e-pl} ελαστοπλαστικό μητρώο και

στη συνέχεια το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο φυσικό σύστημα k_N^{e-pl} .

Οι δυνάμεις υπολογίζονται από: $dP_N = k_N^{e-pl} d\rho_N$.

5.Υπολογισμός των ολικών φυσικών μορφών και δυνάμεων ως:

$$\rho_N^{i+1} = \rho_N^i + d\rho_N^i, \quad P_N^{i+1} = P_N^i + dP_N^i.$$

6.Μετασχηματισμός των φυσικών δυνάμεων στο καρτεσιανό καθολικό σύ-

στημα χρησιμοποιώντας τη σχέση: $P_{i+1} = \alpha_N^t P_N^{i+1} = T_{06e} \bar{\alpha}_N^t P_N^{i+1}$.

7.Υπολογισμός διανύσματος φόρτισης για την $i-1$ επανάληψη, $P_{i+1} = \lambda_{i+1} P$.

8.Υπολογισμός παραμενουσών δράσεων $g_{i+1} = P_{i+1} - F_{i+1}$.

9.Έλεγχος σύγκλισης $\|g_{i+1}\|/\|P_{i+1}\| \leq \varepsilon$, όπου ε είναι η ανοχή η οποία δίνεται ως δεδομένο.

10.Αν έχει επιτευχθεί σύγκλιση, τότε καταγράφονται οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο αρχείο αποτελεσμάτων καθώς και οι φυσικές ενέργειες ως ποσοστά. Επόμενο βήμα **inc**.

11.Αν δεν επιτευχθεί σύγκλιση, τότε επόμενη επανάληψη **ite**.

Επόμενη επανάληψη **ite**

Επόμενη αύξηση **inc**.

6.8 Αλγόριθμος επίλυσης με τη μέθοδο ελέγχου των μετατοπίσεων

Ο αλγόριθμος της υπολογιστικής διαδικασίας της μη γραμμικής ανάλυσης συνδυασμένης με τη μέθοδο ελέγχου των μετατοπίσεων είναι:

Βρόγχος επαναλήψεων **inc**

Βρόγχος μέγιστου αριθμού επαναλήψεων **ite**

*Αν **ite** = 1 ή αν χρησιμοποιείται η μέθοδος επίλυσης Newton-Raphson τότε:

1. Υπολογισμός και μόρφωση του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας του φορέα K_T
2. Παραγοντοποίηση του μητρώου ακαμψίας K_T .

*Αν **ite** = 1 γίνεται έλεγχος για την ύπαρξη μηδενικών ή αρνητικών ιδιοτιμών

- 1 Επίλυση $K_T x_0 = P$.

2 Υπολογισμός του πρώτου φορτικού συντελεστή κάθε επαύξησης από τη

$$\text{σχέση } \delta\lambda_{i=1} = \frac{\Delta u_{i=1}(n) - x_{i=1}^c(n)}{x_{i=1}^p(n)}, \text{ με } n \text{ το βαθμό ελευθερίας στην ελεγχόμε-}$$

νη μετατόπιση, ($i=ite$)

-Υπολογισμός $\Delta u_i = \delta\lambda_i x_0$ και του φορτικού συντελεστή $\lambda_i = \lambda_0 + \delta\lambda_i$. Πήγαινε στο 1.

*Αν $ite \neq 1$

1 Αν χρησιμοποιείται η μέθοδος επίλυσης Newton-Raphson υπολογίζεται το διάνυσμα μετατοπίσεων της πρόλεξης x^p , επιλύοντας την εξίσωση $K_T x^p = P$ και το διορθωτικό διάνυσμα μετατοπίσεων x^c , επιλύοντας την εξίσωση $K_T x^c = -g$, όπου g είναι οι παραμένουσες δράσεις.

2 Αν χρησιμοποιείται η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson υπολογίζεται μόνο το διορθωτικό διάνυσμα μετατοπίσεων x^c , επιλύοντας την εξίσωση $K_T x^c = -g$.

$$\text{-Υπολογισμός του φορτικού συντελεστή από τη σχέση } \delta\lambda_{i=1} = -\frac{x_{i=1}^c(n)}{x_{i=1}^p(n)}$$

($i=ite$).

$$\text{-Υπολογισμός των } \lambda \text{ και } u \text{ ως: } \lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta\lambda_{i+1}, \Delta u_{i+1} = \Delta u_i + \delta\lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c$$

$$1. \text{Υπολογισμός της συνολικής μετατόπισης } u_{i+1} = u_i + \delta\lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c$$

2.Υπολογισμός νέων συντεταγμένων σημείων

3.Για κάθε στοιχείο, υπολογισμός των επαυξητικών φυσικών μορφών $d\rho_N = 1/2 \bar{\alpha}_N [T_{06b} + T_{06e}] d\rho$, όπου $d\rho = \delta\lambda_{i+1} x_i^p + x_i^c$. T_{06b} είναι το μητρώο με τα συνημίτονα κατευθύνσεως στην αρχή της επανάληψης και T_{06e} είναι το μητρώο με τα συνημίτονα κατευθύνσεως στο τέλος της επανάληψης.

4.Υπολογισμός επαυξητικών φυσικών δυνάμεων dP_N . Σε κάθε στρώση του στοιχείου υπολογίζεται το επαυξητικό διάνυσμα αξονικών μορφών $d\gamma_i(d\rho_N, \alpha_N, z)$, το διάνυσμα των φυσικών τάσεων υποθέτοντας ελαστική συμπεριφορά σ_{ee} και η ισοδύναμη πλαστική επαυξητική ανηγμένη παρα-

μόρφωση $d\bar{\gamma}_i^{pl}$. Ανάλογα με την παραμορφωσιακή κατάσταση κάθε στρώσης υπολογίζεται το ελαστικό κ_{ci} ή το κ_{ci}^{e-pl} ελαστοπλαστικό μητρώο και στη συνέχεια το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο φυσικό σύστημα κ_N^{e-pl} .

Οι δυνάμεις υπολογίζονται από: $dP_N = \kappa_N^{e-pl} d\rho_N$.

5.Υπολογισμός των ολικών φυσικών μορφών και δυνάμεων ως:
 $\rho_N^{i+1} = \rho_N^i + d\rho_N^i$, $P_N^{i+1} = P_N^i + dP_N^i$.

6.Μετασχηματισμός των φυσικών δυνάμεων στο καρτεσιανό καθολικό σύστημα χρησιμοποιώντας τη σχέση: $P_{i+1} = \alpha_N^t P_N^{i+1} = T_{06e} \bar{\alpha}_N^t P_N^{i+1}$.

7.Υπολογισμός διανύσματος φόρτισης για την $i-1$ επανάληψη, $P_{i+1} = \lambda_{i+1} P$.

8.Υπολογισμός παραμενουσών δράσεων $g_{i+1} = P_{i+1} - F_{i+1}$.

9.Έλεγχος σύγκλισης $\|g_{i+1}\| / \|P_{i+1}\| \leq \varepsilon$, όπου ε είναι η ανοχή η οποία δίνεται ως δεδομένο.

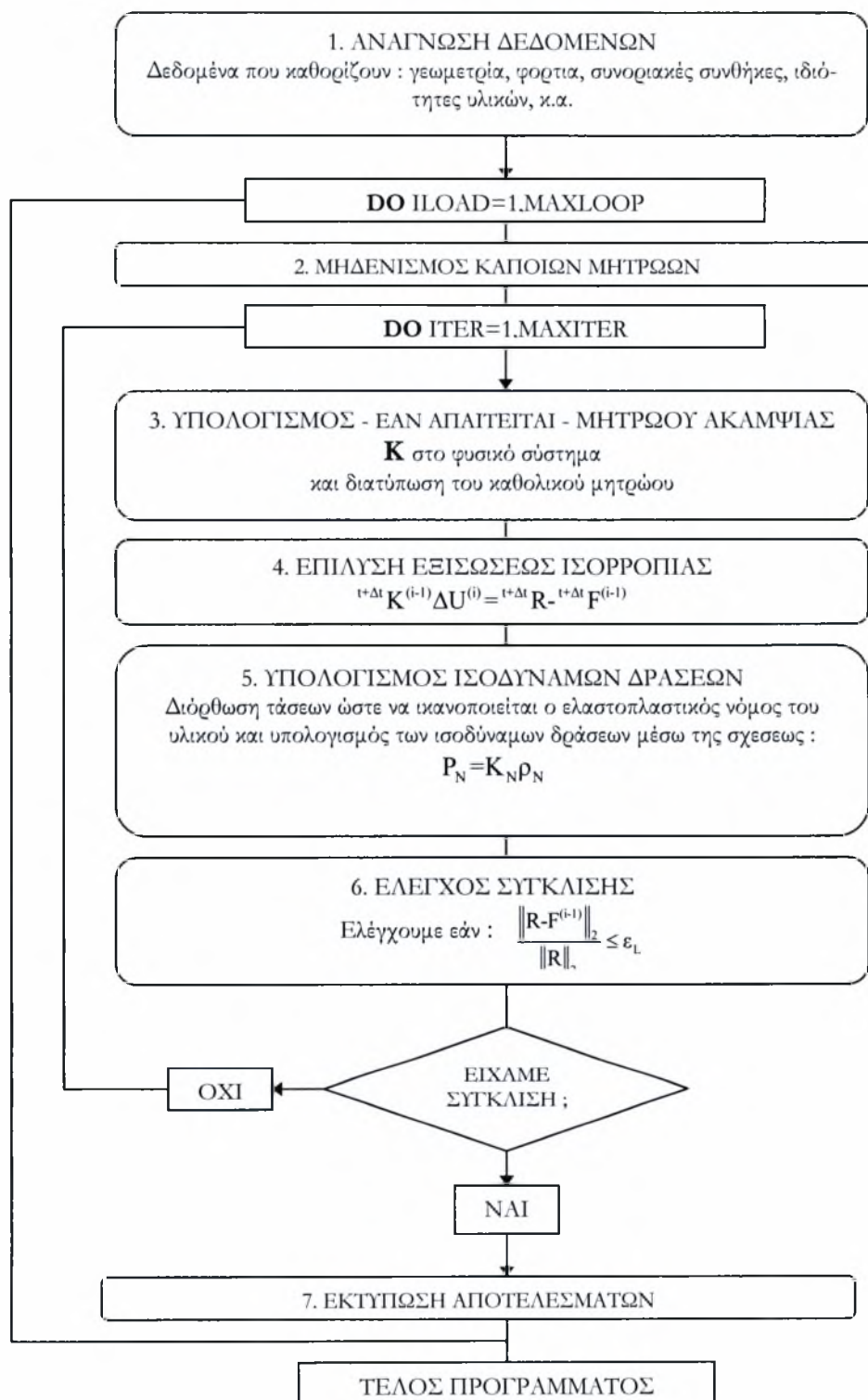
10.Αν έχει επιτευχθεί σύγκλιση, τότε καταγράφονται οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο αρχείο αποτελεσμάτων καθώς και οι φυσικές ενέργειες ως ποσοστά. Επόμενο βήμα **inc**.

11.Αν δεν επιτευχθεί σύγκλιση, τότε επόμενη επανάληψη **ite**.

Επόμενη επανάληψη **ite**

Επόμενη αύξηση **inc**.

ΓΕΝΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ TRIC



7

Παραδείγματα Εφαρμογών Ανάλυσης Φορέων με το Tric και άλλα στοιχεία

7.1 Εισαγωγή

Μετά το θεωρητικό υπόβαθρο του πεπερασμένου στοιχείου Tric που προηγήθηκε, τόσο σε ελαστική όσο και σε μη γραμμική ανάλυση, στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται ένα πλήθος παραδειγμάτων. Στα παραδείγματα αυτά, διακριτοποιούνται και αναλύονται φορείς με το πεπερασμένο στοιχείο Tric καθώς και με άλλα πεπερασμένα στοιχεία. Τα στοιχεία αυτά ήταν τριγωνικά με 6 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (όπως και το Tric), τα οποία εφαρμόζονταν από υπάρχουσες «βιβλιοθήκες στοιχείων» προγραμμάτων ανάλυσης φορέων με πεπερασμένα στοιχεία όπως του Nastran MSC. και του ABAQUS. Άλλες φορές η σύγκριση γινόταν με προτεινόμενα πεπερασμένα στοιχεία από τη διεθνή βιβλιογραφία πάνω στα συγκεκριμένα παραδείγματα.

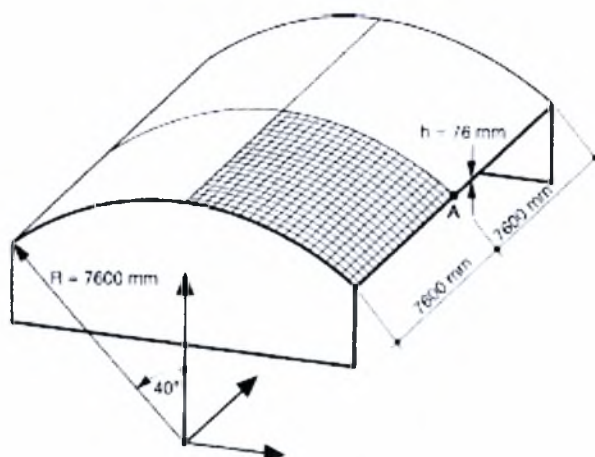
Επισημαίνεται ότι η επίλυση των φορέων με το πεπερασμένο στοιχείο Tric έγινε μέσα από κώδικα της γλώσσας προγραμματισμού Compaq Visual Fortran 6. Στα παραδείγματα αυτά το ενδιαφέρον εστιάζεται στην εξαγωγή των διαγραμμάτων φόρτισης – μετακίνησης (P-δ), στο χρόνο εξαγωγής αποτελεσμάτων, στη σύγκλιση του αποτελέσματος με την πυκνωση του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων και στη σύγκριση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης φορέων με Tric και με άλλα στοιχεία από εμπορικά και ερευνητικά προγράμματα.

7.2 Εφαρμογές σε Κελύφη

7.2.1 Κέλυφος μικρής καμπυλότητας – Εφαρμογή Scordelis

- Γεωμετρία του Φορέα

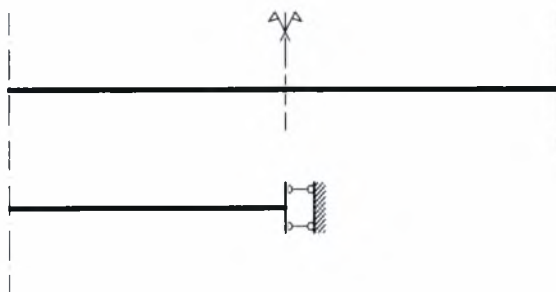
Πρόκειται για ένα λεπτό κέλυφος πάχους $h=76\text{mm}$. Η ακτίνα καμπυλότητάς του είναι $R=7600\text{mm}$. Το κέλυφος διαχωρίζεται σε 4 ίσα κομμάτια όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1. Οι μη καμπυλωμένες πλευρές του κάθε κομματιού του κελύφους έχουν μήκη 7600mm και οι άλλες έχουν ακτίνα καμπυλότητας $R=7600\text{mm}$ και γωνία από το κέντρο των αξόνων 40° όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

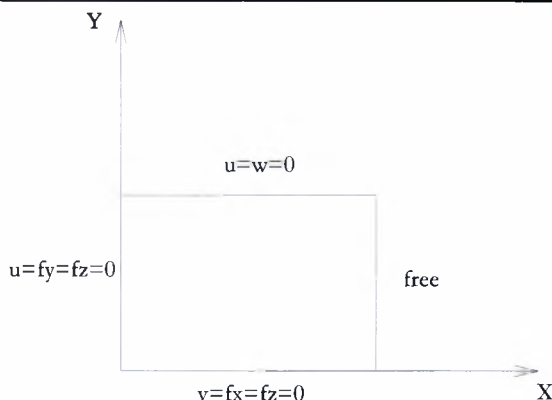


Σχήμα 7.1: Γεωμετρία, δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για το παράδειγμα του Scordelis.

- Στηρίξεις του Κελύφους

Το κάθε κομμάτι από τα τέσσερα του κελύφους, έχει μια πλευρά η οποία είναι αδέσμευτη (ελεύθερη), ενώ οι υπόλοιπες έχουν τις στηρίξεις που απεικονίζονται παρακάτω:





Σχήμα 7.2: Στηρίξεις για το κάθε κομμάτι από τα τέσσερα του κελύφους (κάτω δεξι κομμάτι)

- Διακριτοποίηση του Φορέα

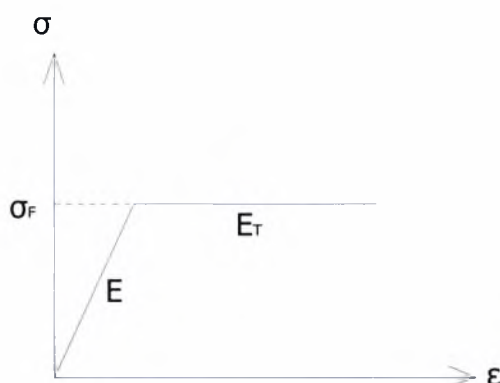
Η διακριτοποίηση του φορέα και συγκεκριμένα του καθενός από τα τέσσερα κομμάτια του κελύφους έγινε με ένα δίκτυο τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων 20×20 δηλαδή με 800 τριγωνικά στοιχεία στο σύνολο του ενός τετάρτου του κελύφους. Επισημαίνεται πως έγιναν και άλλες διακριτοποιήσεις με πιο αραιά δίκτυα για σύγκριση με το προηγούμενο δίκτυο του 20×20 . Το πάχος h του κελύφους διαχωρίζεται σε 8 στρώσεις (layers). Η κάθε στρώση έχει πάχος 9.5mm και η εύρεση των τάσεων γίνεται με ολοκλήρωση σε κάθε μια στρώση από τις 8 του πάχους h .

- Φόρτιση του Φορέα

Ο φορέας φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο που παριστά το ίδιο βάρος του και η τιμή του είναι $f_0 = 0.004 \text{ N/mm}^2$. Επειδή η ανάλυση θα γίνει για μη γραμμικότητα του υλικού αλλά και γεωμετρίας θα αυξάνεται το φορτίο λόγω ίδιου βάρους (με load factor) ώστε να πάρουμε τη πλήρη καμπύλη φορτίου – μετακίνησης σε γραμμική και μη γραμμική περιοχή.

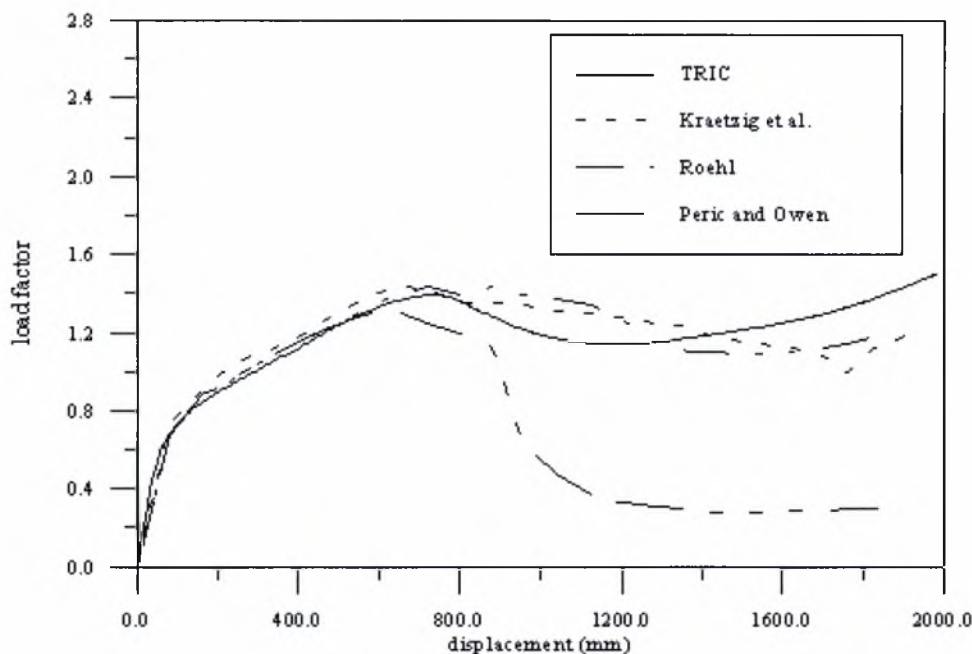
- Χαρακτηριστικά του Προβλήματος

Το υλικό του κελύφους έχει μέτρο ελαστικότητας $E=21000\text{N/mm}^2$. Το μοντέλο στο οποίο θα υπακούει το κέλυφος είναι το ελαστοπλαστικό μοντέλο με μηδενική κράτυνση $E_T=0.0\text{N/mm}^2$ (Σχήμα 7.3). Η τάση διαρροής είναι $\sigma_F=4.2\text{N/mm}^2$ ενώ ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0$.



Σχήμα 7.3: Ελαστοπλαστικό μοντέλο με μηδενική κράτυνση

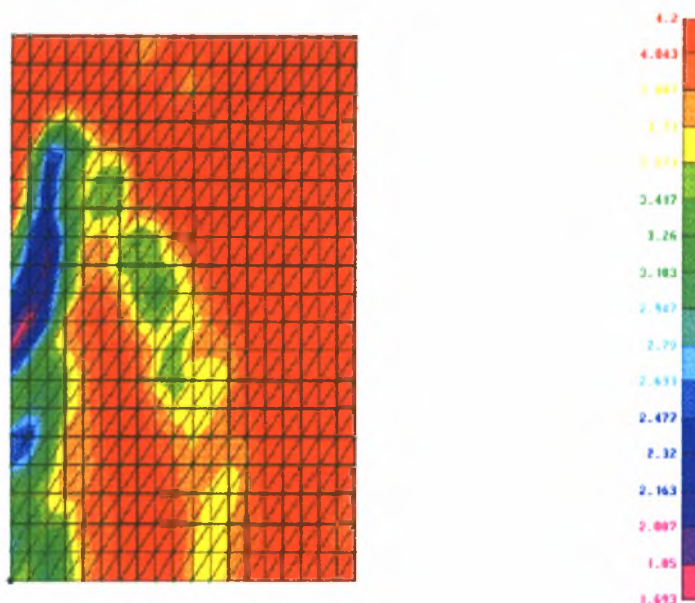
Τα αποτελέσματα αυτά θα συγκριθούν με α) τριγωνικά στοιχεία Kraetzig et al.[41] β) ισοπαραμετρικά στοιχεία από Montag et.al [34] και γ) πεπερασμένα στοιχεία κελύφους κατά Roehl [36]. Η σύγκριση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου δίνεται το διάγραμμα φόρτισης – μετακίνησης για το σημείο A.



Σχήμα 7.4: Διάγραμμα Φορτίου (load factor) σε σχέση με την μετακίνηση για το σημείο Α

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρείται ότι με την ανάλυση του τριγωνικού στοιχείου Tric, το κέλυφος έχει γραμμική συμπεριφορά μέχρι το 0,65 (load factor) του φορτίου f_0 . Κατόπιν αρχίζει η μη γραμμική συμπεριφορά του κελύφους που επισημαίνεται πως οφείλεται στην μη γραμμικότητα του υλικού και όχι της γεωμετρίας.

Κατά στα 1,06 του f_0 παρατηρείται μια μικρή, μάλλον τοπική αστάθεια - λυγισμός του κελύφους με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ένα μικρό άλμα – βύθισμα στο διάγραμμα P-δ. Περίπου στα 1,43 (load factor) του φορτίου f_0 , παρατηρείται μια γενικότερη αστάθεια - φαινόμενα λυγισμού σε γενικότερα μέρη του κελύφους από την άνω επιφάνεια προς τα κάτω πέρα του προαναφερθέντος φορτίου και με την ανάλυση που έγινε με το πεπερασμένο στοιχείο Tric δόθηκε η δυνατότητα να παρατηρηθεί ακόμα και η μεταλυγισμική συμπεριφορά του κελύφους πέρα του προαναφερθέντος σημείου. Κατά τη διάρκεια αυτής της συμπεριφοράς παρατηρούμε διαδοχικές πτώσεις και ανόδους στην καμπύλη P-δ (Σχήμα 7.4).



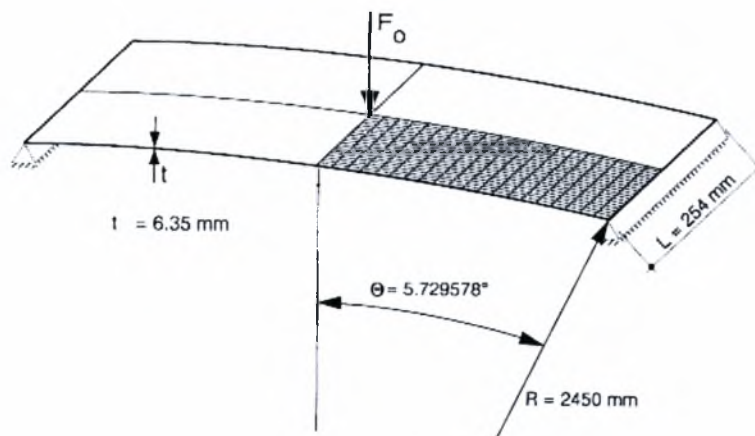
Σχήμα 7.5: Οι τάσεις κατά Von-Misses για βήμα φόρτισης (Load Factor) $\lambda=1.5$ στην άνω επιφάνεια του ενός τετάρτου του κελύφους

Παραπάνω απεικονίζεται η πλαστική τάση κατά Von-Misses για βήμα φόρτισης (Load Factor) $\lambda=1.5$ στην άνω επιφάνεια του ενός τετάρτου του κελύφους. Η τάση διαρροής $\sigma_F=4.2\text{N/mm}^2$ στο σχήμα απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα. Επισημαίνεται ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα έγιναν 400 βήματα φόρτισης και μέγιστο πλήθος επαναλήψεων 18 σε κάθε φορτιστικό βήμα ώστε να εξαχθεί η παραπάνω καμπύλη. Η επαναληπτική διαδικασία έγινε με τη πλήρη μέθοδο της Newton-Raphson και ο χρόνος εκτέλεσης ήταν 13 λεπτά και 40'' σε επεξεργαστή Pentium IV στα 2.6 GHz με σύνολο επαναλήψεων 1967.

7.2.2 Κυλινδρικό Κέλυφος υπό συγκεντρωμένο φορτίο

- Γεωμετρία του Φορέα

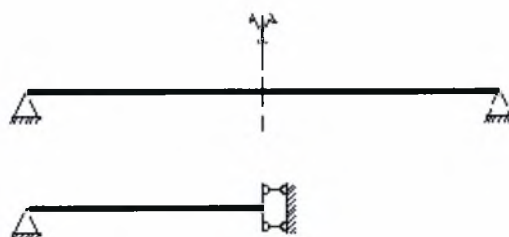
Πρόκειται για ένα λεπτό κέλυφος πάχους $t=6,35\text{mm}$. Η ακτίνα καμπυλότητάς του είναι $R=2450\text{mm}$. Το κέλυφος διαχωρίζεται σε 4 ίσα κομμάτια όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.6 λόγω συμμετρίας στη γεωμετρία και τη φόρτιση σε κάθε κομμάτι. Οι μη καμπυλωμένες πλευρές του κάθε κομματιού του κελύφους έχουν μήκη $L=254\text{mm}$ και οι άλλες έχουν ακτίνα καμπυλότητας $R=2450\text{mm}$ και γωνία από το κέντρο των αξόνων $\theta=5,73^\circ$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

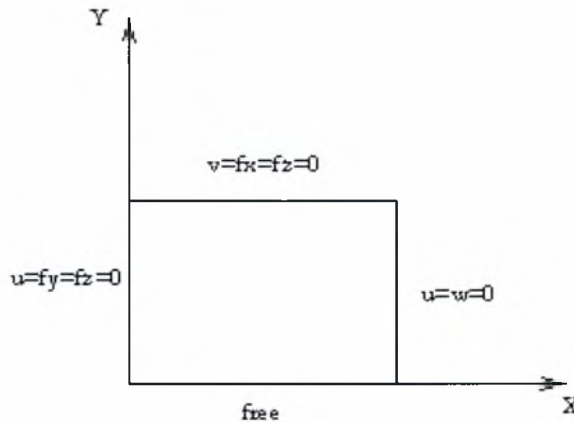


Σχήμα 7.6: Γεωμετρία, δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για το παράδειγμα του κυλινδρικού κελύφους

- Στηρίξεις του Κελύφους

Το κέλυφος στις δυο ακριανές παρειές του είναι στηριγμένο σε αρθρώσεις. Οι υπόλοιπες πλευρές του είναι ελεύθερες. Το κάθε κομμάτι από τα τέσσερα του κελύφους, έχει μια πλευρά η οποία είναι αδέσμευτη (ελεύθερη), ενώ οι υπόλοιπες έχουν τις στηρίξεις που απεικονίζονται παρακάτω:





Σχήμα 7.7: Στηρίξεις για το κάθε κομμάτι από τα τέσσερα του κελύφους (κάτω δεξιά κομμάτι)

- Διακριτοποίηση του Φορέα

Η διακριτοποίηση του φορέα και συγκεκριμένα του καθενός από τα τέσσερα κομμάτια του κελύφους έγινε με ένα δίκτυο τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων 20×20 δηλαδή με 800 τριγωνικά στοιχεία στο σύνολο του ενός τετάρτου του κελύφους. Το πάχος t του κελύφους διαχωρίζεται σε 8 στρώσεις (layers). Η κάθε στρώση έχει πάχος 0.79375mm και η εύρεση των τάσεων γίνεται με ολοκλήρωση σε κάθε μια στρώση από τις 8 του πάχους t .

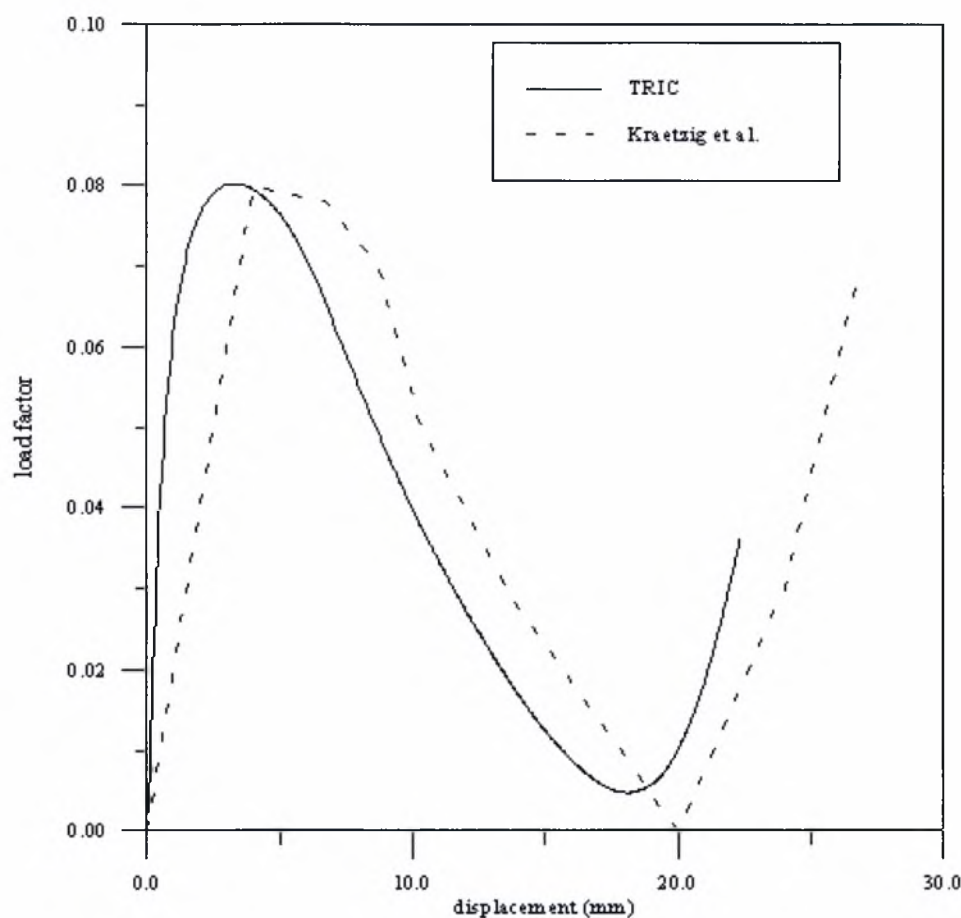
- Φόρτιση του Φορέα

Ο φορέας φορτίζεται με μεμονωμένο συγκεντρωμένο φορτίο και η τιμή του είναι $f_0=1\text{kN}$ για κάθε ένα από τα τέσσερα κομμάτια του κελύφους. Επειδή η ανάλυση θα γίνει για μη γραμμικότητα του υλικού αλλά και γεωμετρίας θα αυξάνεται το φορτίο (με load factor) ώστε να πάρουμε τη πλήρη καμπύλη φορτίου – μετακίνησης σε γραμμική και μη γραμμική περιοχή.

- Χαρακτηριστικά του Προβλήματος

Το υλικό του κελύφους έχει μέτρο ελαστικότητας $E=3.103\text{kN/mm}^2$. Το μοντέλο στο οποίο θα υπακούει το κέλυφος είναι το ελαστοπλαστικό μοντέλο με μηδενική κράτυνση $E_T=0.0\text{kN/mm}^2$ (Σχήμα 7.3). Η τάση διαρροής είναι $\sigma_F=0.001\text{kN/mm}^2$ ενώ ο λόγος

του Poisson είναι $\nu=0.3$. Τα αποτελέσματα αυτά θα συγκριθούν με πολυστρωματικό τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο προτεινόμενο από τον Kraetzig et al.[41] Η σύγκριση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου δίνεται το διάγραμμα φόρτισης – μετακίνησης για το σημείο του συγκεντρωμένου φορτίου F_0 (Σχήμα 7.8).



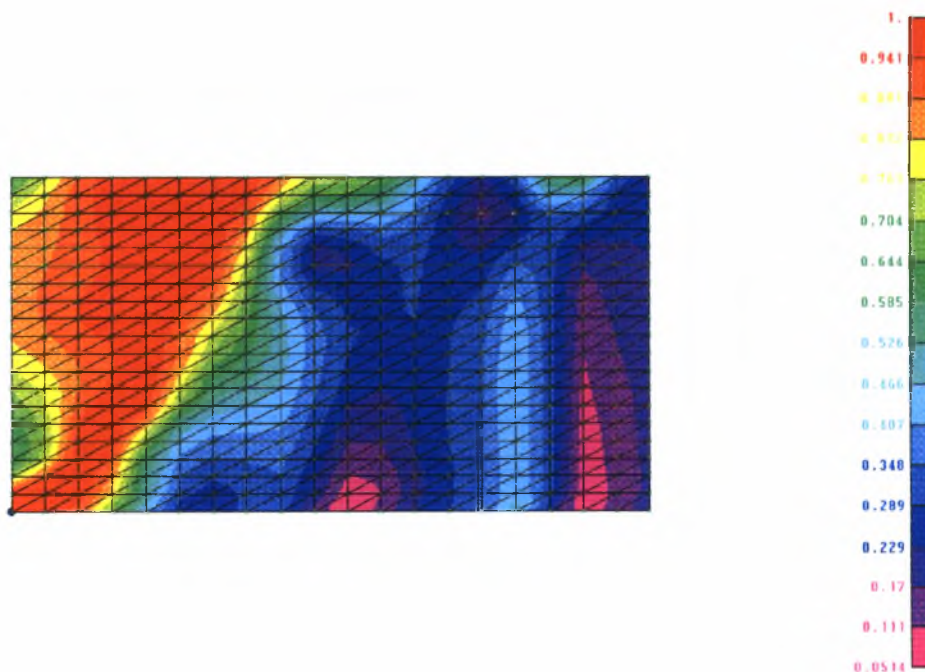
Σχήμα 7.8: Διάγραμμα Φορτίου (load factor) σε σχέση με την ακτινική μετακίνηση για το σημείο φόρτισης

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρείται ότι με την ανάλυση του τριγωνικού στοιχείου Tric, το κέλυφος έχει γραμμική συμπεριφορά μέχρι το 0,075 (load factor) του φορτίου F_0 . Κατόπιν αρχίζει η μη γραμμική συμπεριφορά του κελύφους που επισημαίνεται πως οφείλεται στην μη γραμμικότητα του υλικού και όχι της γεωμετρίας.

Κατά στα 0,08 του f_0 παρατηρείται μια γενικότερη αστάθεια - φαινόμενα λυγισμού σε ευρύτερα μέρη του κελύφους από την άνω προς την κάτω επιφάνεια. Πέρα του προαναφερθέντος φορτίου και με την ανάλυση που έγινε με το πεπερασμένο στοιχείο Tric δόθηκε η δυνατότητα να παρατηρηθεί ακόμα και η μεταλυγισμική συμπεριφορά του κελύφους.

κελύφους. Κατά τη διάρκεια αυτής της συμπεριφοράς παρατηρούμε μια μεγάλη πτώση και στη συνέχεια μια άνοδο στην καμπύλη P-δ που απεικονίζει την αλλαγή ισορροπίας του συστήματος σε μια νέα θέση (πτώση στην καμπύλη) και στη συνέχεια την εκ νέου φόρτιση του νέου συστήματος (άνοδος στην καμπύλη Σχήμα 7.8).

Παρακάτω απεικονίζεται η πλαστική τάση κατά Von-Misses για βήμα φόρτισης (Load Factor) $\lambda=0.0035$ στην άνω επιφάνεια του ενός τετάρτου του κελύφους. Η τάση διαρροής $\sigma_F=0.001\text{kN/mm}^2$ στο σχήμα απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα. Επισημαίνεται ότι τα βήματα φόρτισης στο συγκεκριμένο παράδειγμα έγιναν με 600 βήματα φόρτισης και μέγιστο πλήθος επαναλήψεων 18 σε κάθε φορτιστικό βήμα. Η επαναληπτική διαδικασία έγινε με τη πλήρη μέθοδο της Newton-Raphson και ο χρόνος εκτέλεσης ήταν 21 λεπτά σε επεξεργαστή Pentium IV στα 2.6 GHz με σύνολο επαναλήψεων 4253.

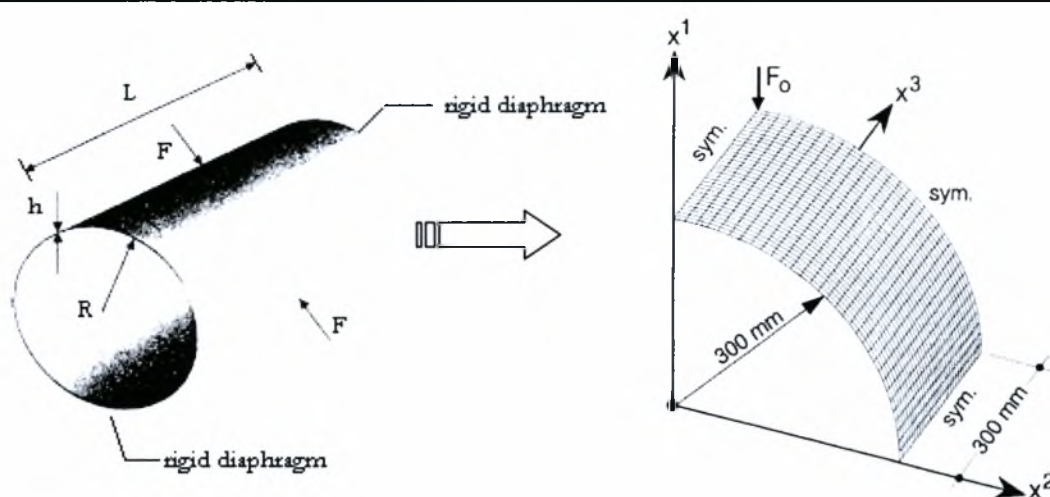


Σχήμα 7.9: Οι τάσεις κατά Von-Misses για βήμα φόρτισης (Load Factor) $\lambda=0.0035$ στην άνω επιφάνεια του ενός τετάρτου του κελύφους

7.2.3 Τμήμα Κοντού Κυλίνδρου

- Γεωμετρία του Φορέα

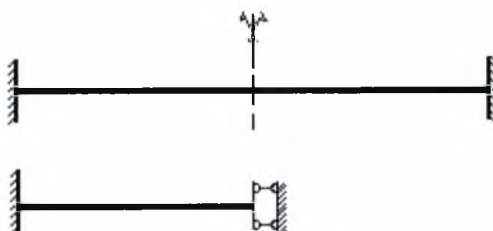
Πρόκειται για ένα λεπτό κέλυφος πάχους $h=3.0\text{mm}$. Η ακτίνα καμπυλότητάς του είναι $R=300\text{mm}$. Ο κελυφωτός κύλινδρος διαχωρίζεται σε 8 ίσα κομμάτια όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.10. Οι μη καμπυλωμένες πλευρές του κάθε κομματιού του κελύφους έχουν μήκη 300mm και οι άλλες έχουν ακτίνα καμπυλότητας $R=300\text{mm}$ και γωνία από το κέντρο των αξόνων 90° όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

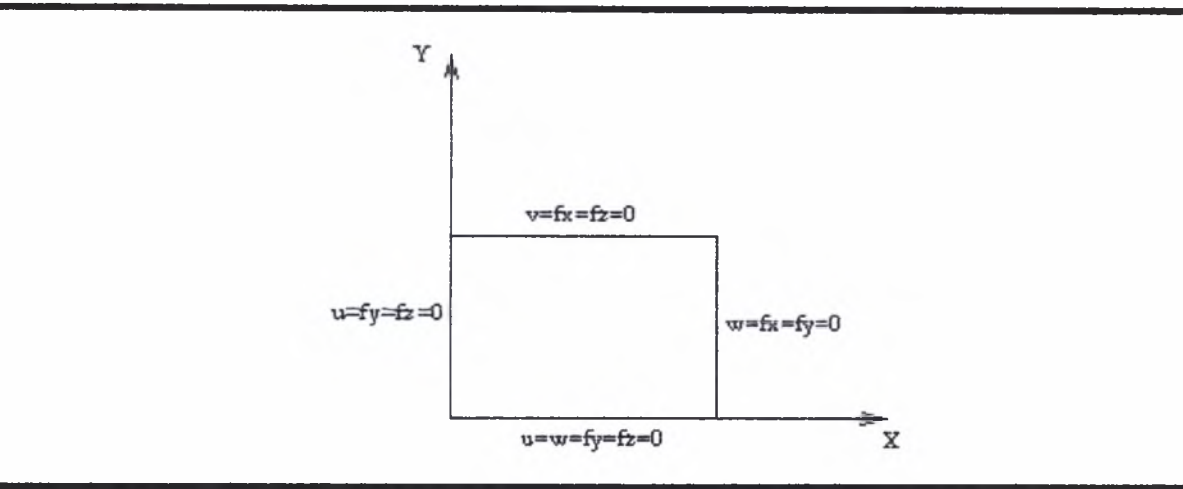


Σχήμα 7.10: Γεωμετρία, δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για το παράδειγμα του κελυφωτού κοντού κυλίνδρου

- Στηρίξεις του Κελύφους

Ο κύλινδρος στις δυο ακριανές παρειές του είναι στηριγμένος σε στερεά διαφράγματα. Οι υπόλοιπες πλευρές του είναι ελεύθερες. Το κάθε κομμάτι από τα οκτώ του κελύφους, έχει μια πλευρά η οποία είναι διάφραγμα, ενώ οι υπόλοιπες έχουν τις στηρίξεις που απεικονίζονται παρακάτω (Σχήμα 7.11):





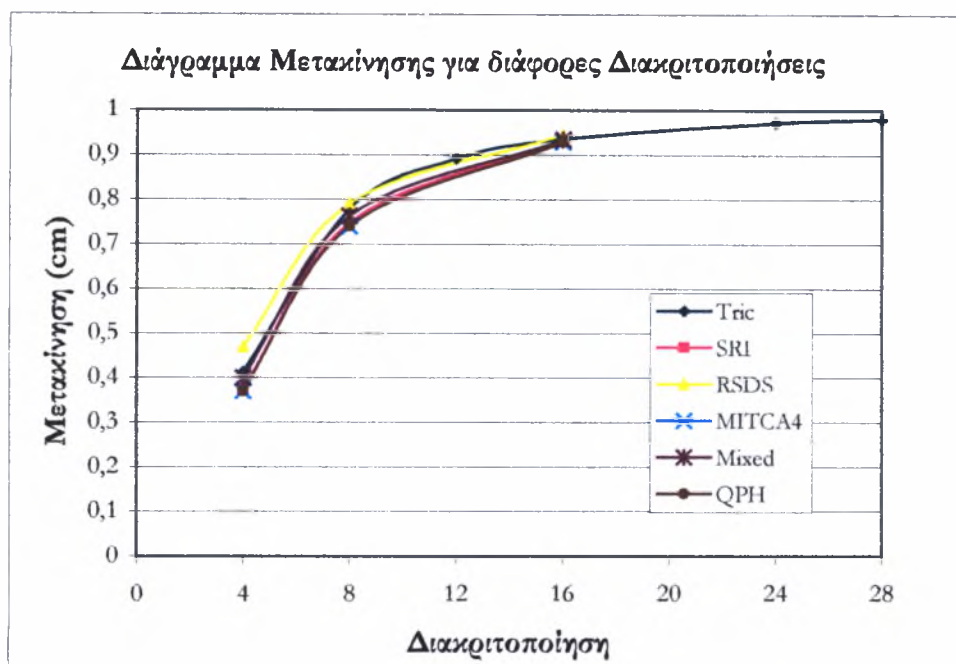
Σχήμα 7.11: Στηρίξεις για το κάθε κομμάτι από τα οκτώ του κελύφους (πάνω αριστερά κομμάτι)

• Διακριτοποίηση του Φορέα

Η διακριτοποίηση του φορέα και συγκεκριμένα του καθενός από τα οκτώ κομμάτια του κελύφους έγινε με ένα δίκτυο τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων 32×32 δηλαδή με 2048 τριγωνικά στοιχεία στο σύνολο του ενός ογδούου του κελύφους. Επισημαίνεται πως έγιναν και άλλες διακριτοποιήσεις με πιο αραιά δίκτυα για σύγκριση με το προηγούμενο δίκτυο του 32×32 αλλά και διακριτοποιήσεις με πεπερασμένα στοιχεία, προτεινόμενα, στη διεθνή βιβλιογραφία όπως φαίνεται και σε παρακάτω πίνακα (Πίνακας 7.1). Το πάχος *h* του κελύφους διαχωρίζεται σε 8 στρώσεις(layers). Η κάθε στρώση έχει πάχος 0.375mm και η εύρεση των τάσεων γίνεται με ολοκλήρωση σε κάθε μια στρώση από τις 8 του πάχους *h*.

Mesh	SRI [40]	RSDS [11]	MITCA4 [27]	Mixed [20]	QPH [37]	TRIC
4x4	0.373	0.469	0.370	0.399	0.370	0.412
8x8	0.747	0.791	0.740	0.763	0.740	0.779
12x12						0.892
16x16	0.935	0.946	0.930	0.935	0.930	0.936
24x24						0.972
28x28						0.981

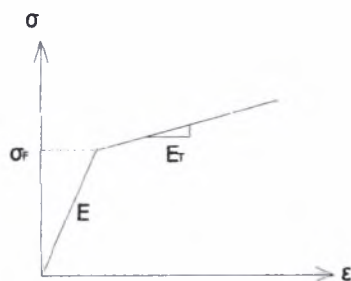
Πίνακας 7.1: Διακριτοποιήσεις με Tric και άλλα προτεινόμενα από τη διεθνή βιβλιογραφία πεπερασμένα στοιχεία.



Διάγραμμα 7.1: Σύγκριση Tric με άλλα προτεινόμενα από τη διεθνή βιβλιογραφία πεπερασμένα στοιχεία.

- Φόρτιση του Φορέα

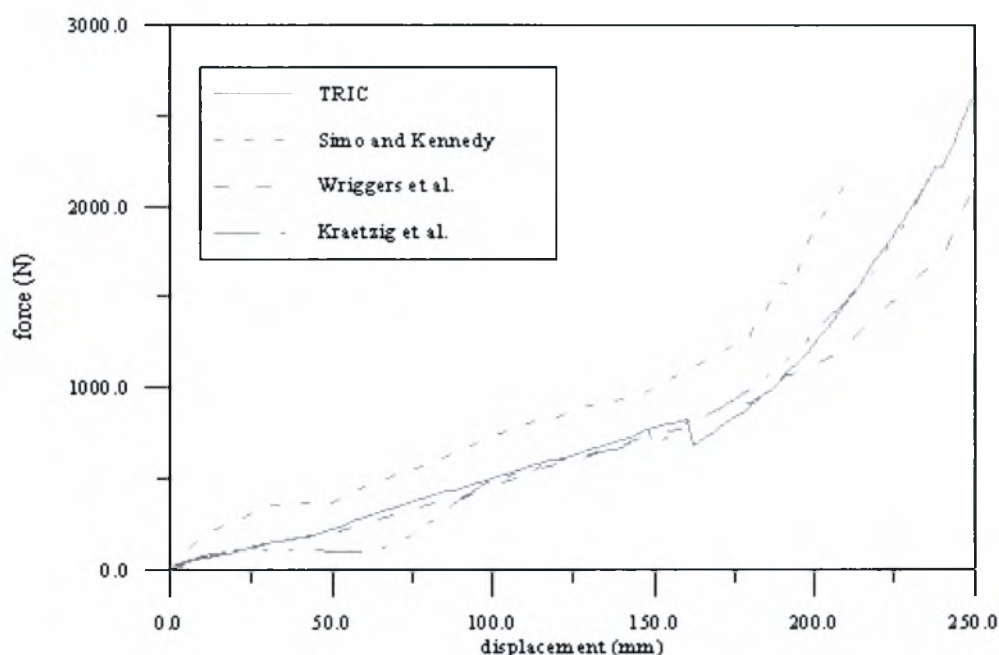
Ο φορέας φορτίζεται με συγκεντρωμένα φορτία και η τιμή τους είναι $F_0=1\text{N}$ για κάθε πλευρά του κυλινδρικού κελύφους. Επειδή η ανάλυση θα γίνει για μη γραμμικότητα του υλικού αλλά και γεωμετρίας θα αυξάνεται το φορτίο (με load factor) ώστε να πάρουμε τη πλήρη καμπύλη φορτίου – μετακίνησης σε γραμμική και μη γραμμική περιοχή.



Σχήμα 7.12: Ελαστοπλαστικό μοντέλο με μη μηδενική κράτυνση E_T

- Χαρακτηριστικά του Προβλήματος

Το υλικό του κελύφους έχει μέτρο ελαστικότητας $E=3.0 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$. Το μοντέλο στο οποίο θα υπακούει το κέλυφος είναι το ελαστοπλαστικό μοντέλο με κράτυνση $E_T=3.0 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^2$ (Σχήμα 7.12). Η τάση διαρροής είναι $\sigma_F=24,3 \text{ N/mm}^2$ ενώ ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0.3$. Τα αποτελέσματα αυτά θα συγκριθούν με πεπερασμένα στοιχεία προτεινόμενα από τη διεθνή βιβλιογραφία και συγκεκριμένα από τους Simo and Kennedy [19], Wriggers et al.[35] και με το πολυστρωματικό τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο προτεινόμενο από τον Kraetzig et al. [22] Η σύγκριση φαίνεται στο Σχήμα 7.13 όπου δίνεται το διάγραμμα φόρτισης και ακτινικής μετατόπισης.

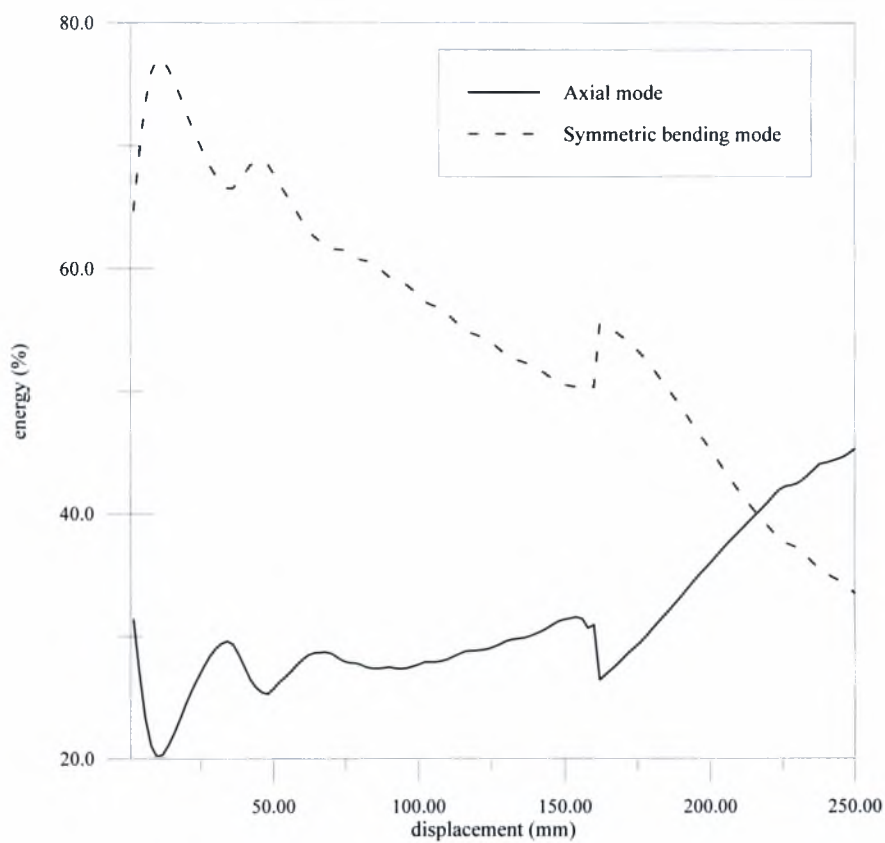


Σχήμα 7.13: Διάγραμμα Φορτίου (load factor) σε σχέση με την ακτινική μετακίνηση για τα σημεία φόρτισης

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρείται ότι με την ανάλυση του τριγωνικού στοιχείου Tric, το κέλυφος έχει γραμμική συμπεριφορά μέχρι περίπου στα 162mm. Στο σημείο αυτό παρατηρείται ένα άλμα στο διάγραμμα P-δ. Κατόπιν αρχίζει η έντονα μη γραμμική συμπεριφορά του κελύφους.

Το παραπάνω κέλυφος έχει τη δυνατότητα παραλαβής φορτίου μέσω δυο μηχανισμών: α) Της καμπτικής δυσκαμψίας και β) της μεμβρανικής λειτουργίας του (αξονική δυσκαμψία). Πριν από το άλμα στο διάγραμμα P-δ ενεργεί σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό η συμμετρικά καμπτική δυσκαμψία. Αντίθετα μετά το άλμα το κέλυφος μεταπίπτει σε ένα

σύστημα που παραλαμβάνει την ένταση στο μεγαλύτερο βαθμό του από τη αξονικά συμμετρική δυσκαμψία όπως παρατηρείται και από το Σχήμα 7.14.

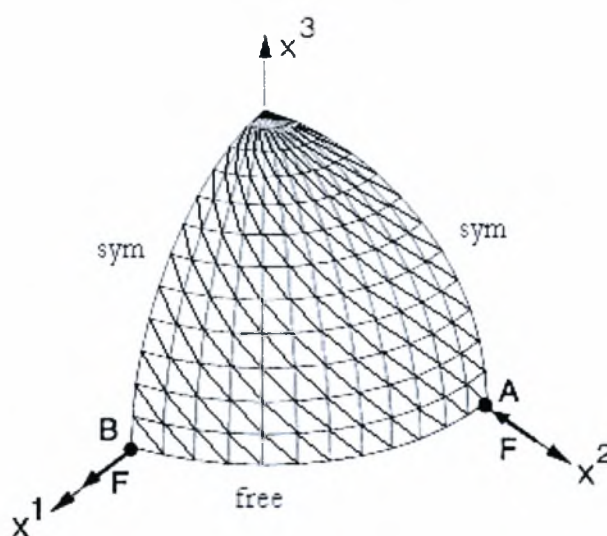


Σχήμα 7.14: Ενέργεια του συστήματος κατά τη φόρτιση. Απόσβεση ενέργειας σε αξονική και καμπτική δυσκαμψία

7.2.4 Τμήμα Ημισφαιρικού Κελύφους

- Γεωμετρία του Φορέα

Πρόκειται για ένα ημισφαιρικό κέλυφος πάχους $h=0.5\text{cm}$. Η ακτίνα καμπυλότητάς του είναι $R=10\text{cm}$. Το τμήμα που εξετάζεται είναι το $1/4$ του ημισφαιρικού κελύφους όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.15.



Σχήμα 7.15: Γεωμετρία, δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για το παράδειγμα του κελυφωτού ημισφαιρίου.

- Στηρίξεις του Κελύφους

Το $1/4$ του ημισφαιρικού κελύφους έχει την κάτω πλευρά του ελεύθερη, ενώ οι δυο άλλες ενώνονται με το υπόλοιπο τμήμα του κελύφους (Σχήμα 7.15).

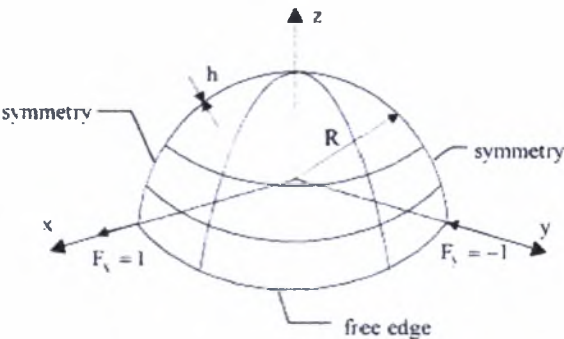
- Διακριτοποίηση του Φορέα

Λόγω συμμετρίας του κελύφους διακριτοποιείται το $1/4$ του κελύφους με ένα δίκτυο τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων $\text{Tric } 12 \times 12$ δηλαδή 288 στο σύνολο. Επισημαίνεται πως έγιναν και άλλες διακριτοποιήσεις με πιο αραιά δίκτυα για σύγκριση με το προηγούμενο δίκτυο του 12×12 αλλά και διακριτοποιήσεις με πεπερασμένα στοιχεία, προτεινόμενα, στη διεθνή βιβλιογραφία όπως φαίνεται και σε παρακάτω πίνακα (Σχήμα 7,16 - Πίνακας 7.2). Από τον πίνακα αυτό είναι φανερό ότι η σύγκλιση στο ακριβές αποτέλεσμα επιτυγχά-

αποτέλεσμα επιτυγχάνεται πολύ πιο γρήγορα με το στοιχείο Tric από ότι με τα άλλα πεπερασμένα στοιχεία ακόμη και για αραιές διακριτοποιήσεις. Το πάχος h του κελύφους διαχωρίζεται σε 2 στρώσεις (layers). Η κάθε στρώση έχει πάχος 0.25cm και η εύρεση των τάσεων γίνεται με ολοκλήρωση σε κάθε μια από τις δυο στρώσεις του πάχους h .

• Φόρτιση του Φορέα

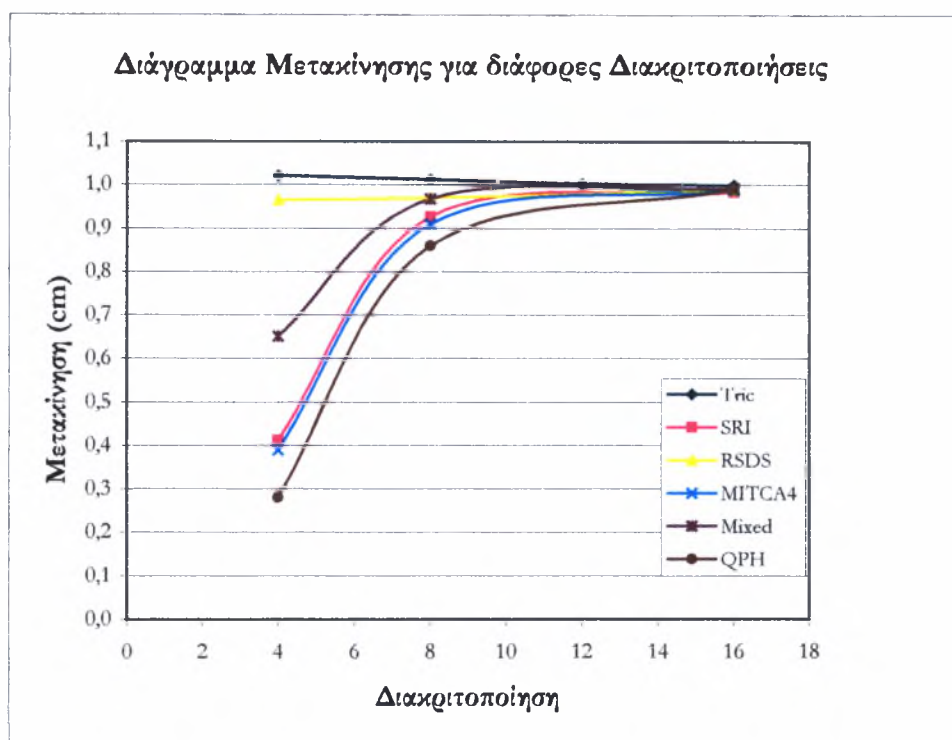
Ο φορέας φορτίζεται με συγκεντρωμένα φορτία και η τιμή τους είναι $F_0=0.001\text{kN}$ στα σημεία A και B του $\frac{1}{4}$ του ημισφαιρικού κελύφους. Όπως απεικονίζεται στα σημεία αυτά τα φορτία έχουν αντίθετη φορά. Επειδή η ανάλυση θα γίνει για μη γραμμικότητα του υλικού αλλά και γεωμετρίας θα αυξάνεται το φορτίο σταδιακά (με load factor) ώστε να πάρουμε τη πλήρη καμπύλη φορτίου – μετακίνησης σε γραμμική και μη γραμμική περιοχή.



Σχήμα 7.16: Γεωμετρία, δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για το παράδειγμα του κελυφωτού ημισφαιρίου με τα εξής χαρακτηριστικά: $R=10\text{cm}$, $h=0.04\text{cm}$, $E=6.825\text{ kN/cm}^2$, $E_T=0$ και $\nu=0.3$

Mesh	SRI [40]	RSDS [11]	MITCA4 [27]	Mixed [20]	QPH [37]	TRIC
4x4	0.412	0.965	0.390	0.651	0.280	1.022
8x8	0.927	0.971	0.910	0.968	0.860	1.013
12x12						1.003
16x16	0.984	0.989	0.989	0.993	0.990	1.000

Πίνακας 7.2: Διακριτοποιήσεις με Tric και άλλα προτεινόμενα, από τη διεθνή βιβλιογραφία, πεπερασμένα στοιχεία (με load factor 5)

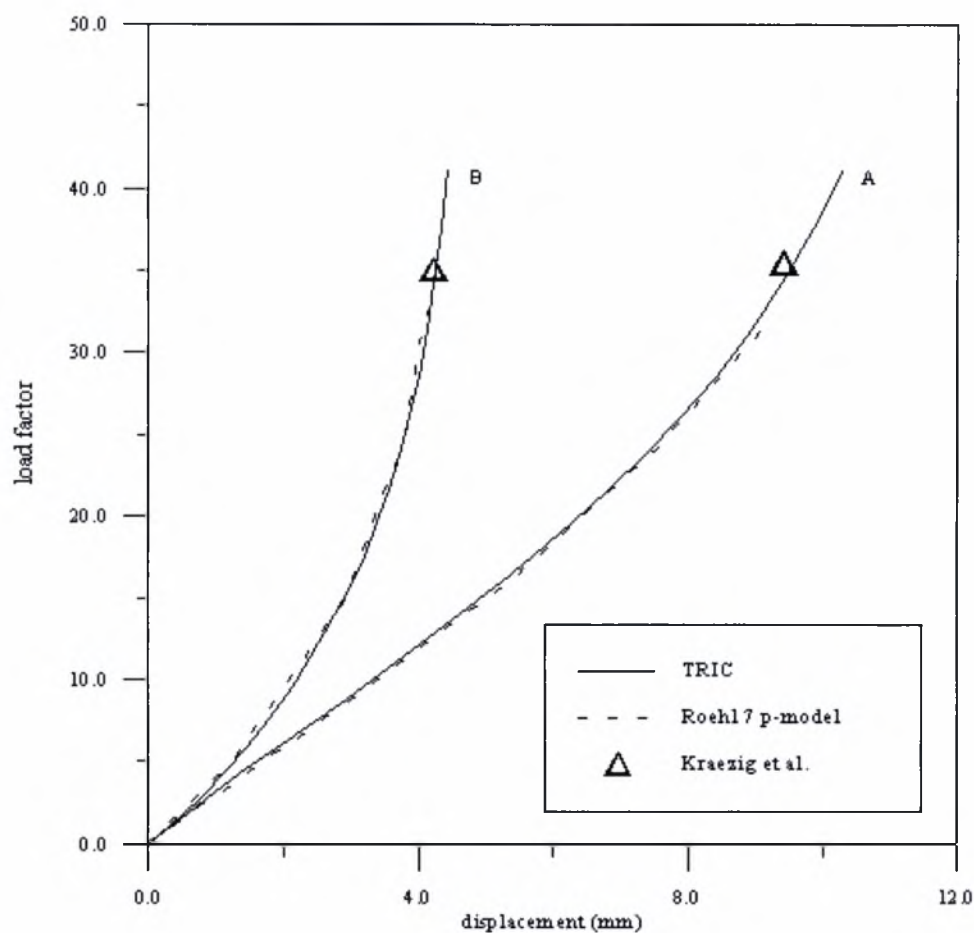


Διάγραμμα 7.2: Σύγκριση Tric με άλλα προτεινόμενα από τη διεθνή βιβλιογραφία πεπερασμένα στοιχεία.

- Χαρακτηριστικά του Προβλήματος

Το υλικό του κελύφους έχει μέτρο ελαστικότητας $E=10 \text{ kN/cm}^2$. Το μοντέλο στο οποίο θα υπακούει το κέλυφος είναι το ελαστοπλαστικό μοντέλο με κράτυνση $E_T=2.308 \text{ kN/cm}^2$ (Σχήμα 7.12). Η τάση διαρροής είναι $\sigma_F=0.2 \text{ kN/cm}^2$ ενώ ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0.2$. Τα αποτελέσματα αυτά θα συγκριθούν με πεπερασμένα στοιχεία προτεινόμενα από τη διεθνή βιβλιογραφία και συγκεκριμένα με το 7-παραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο του Roehl.[36] και με το τετρακομβικό ισοπαραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο προτεινόμενο από τον Kraetzig et al [22].

Η σύγκριση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου δίνεται το διάγραμμα φόρτισης και μετατόπισης στα σημεία Α και Β (Σχήμα 7.17). Όπως παρατηρείται από το παρακάτω διάγραμμα υπάρχει μια σχεδόν απόλυτη ταύτιση των αποτελεσμάτων για όλες τις διακριτοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν.



Σχήμα 7.17: Σύγκριση του Tric με άλλα προτεινόμενα πεπερασμένα στοιχεία για το κελυφτό ημισφαίριο.

Σημείωση: Όλα τα παραπάνω παραδείγματα έγιναν βασισμένα στο κριτήριο διαρροής κατά Von-Mises και ο νόμος της κράτυνσης, σε όσα παραδείγματα εμφανιζόταν αυτή, ήταν ισотροπικός.

7.3 Εφαρμογές σε Μεταλλικές Πλαισιακές Κατασκευές

Από όλα τα παραπάνω παραδείγματα, τα θεωρητικά πλεονεκτήματα του στοιχείου Tric φάνηκαν και στη πράξη. Η προσοχή σε αυτή τη παράγραφο θα εστιαστεί σε δυο από τα παραπάνω πλεονεκτήματα και πιο συγκεκριμένα, στο μειωμένο υπολογιστικό χρόνο ανάλυσης και στην εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων ακόμη και με αραιά δίκτυα σε σχέση με τα άλλα στοιχεία.

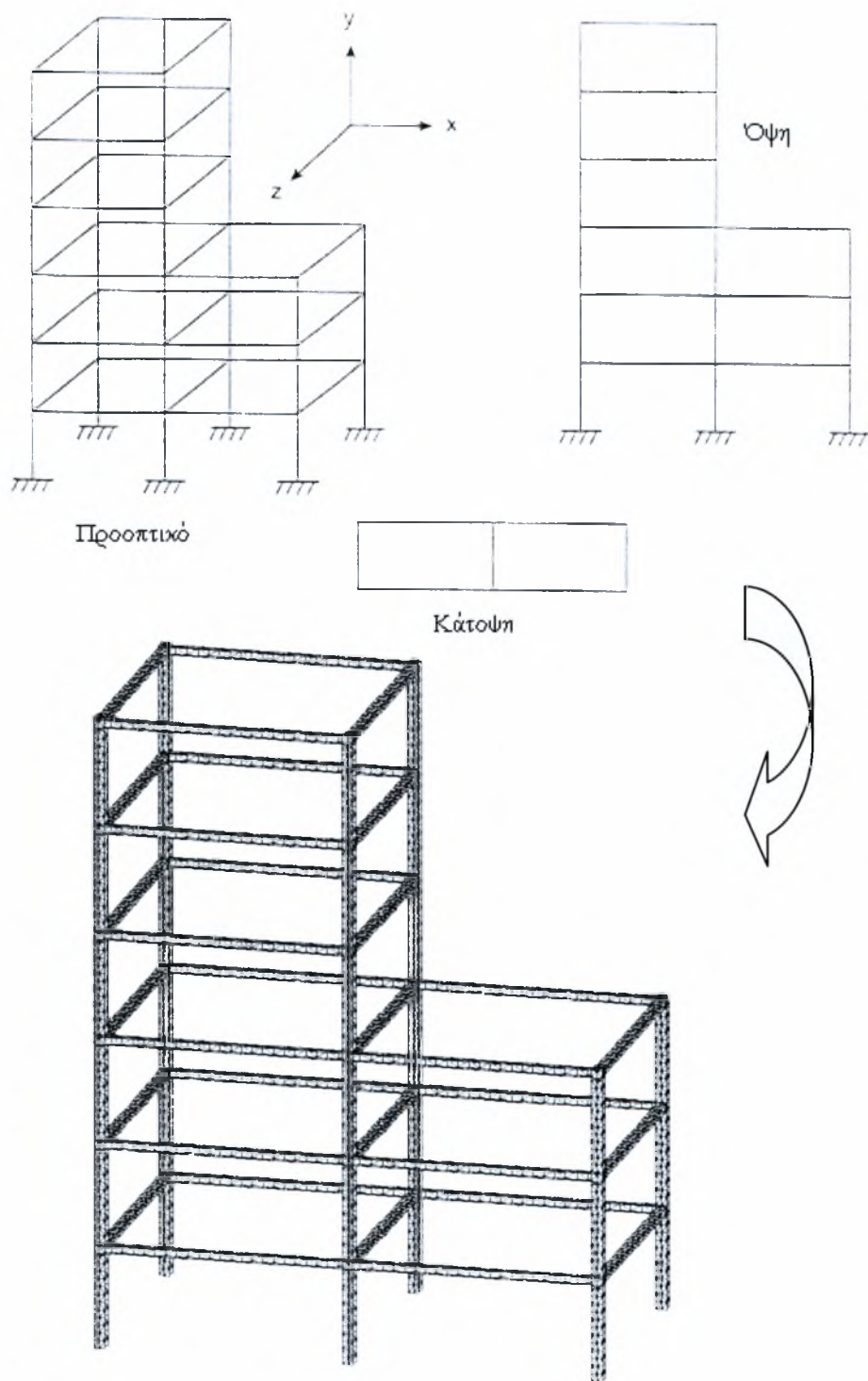
Αρχικά η σκέψη ότι θα μπορούσαμε να διακριτοποιήσουμε και άλλους φορείς με πάρα πολλούς βαθμούς ελευθερίας εκτός των κελυφών ήταν αδύνατο να υλοποιηθεί με αυτού του είδους πεπερασμένα στοιχεία (πολυστρωματικά, τριγωνικά με 6 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο). Τα δύο πλεονεκτήματα, όμως, που αναφέρθηκαν στη προηγούμενη παράγραφο έδωσαν λύση σε μεγάλα προβλήματα που υπήρχαν στη διακριτοποίηση τέτοιων φορέων που είναι ο χρόνος εξαγωγής αποτελεσμάτων και η ορθότητά τους.

Οι φορείς βέβαια που μπορούν πιο εύκολα να προσομοιωθούν ως μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων είναι οι μεταλλικές κατασκευές οι οποίες αποτελούνται από ομοιογενές και ισότροπο υλικό που είναι ο χάλυβας. Οι φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα είναι πιο πολύπλοκοι αφού στερούνται πολλές φορές ομοιογένειας υλικών (σκυροδέματος και χάλυβα) και δεν παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία.

Συνεπώς το πρώτο βήμα προς τη κατεύθυνση της μοντελοποίησης μεταλλικών κατασκευών με πολυστρωματικά τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία γίνεται μέσω αυτής της διπλωματικής εργασίας. Αξίζει να σημειωθεί πως τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν την αρχή μιας εκτεταμένης έρευνας που θα πρέπει να συνεχιστεί προς αυτή την κατεύθυνση για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Οι μοντελοποιήσεις αυτή τη φορά πέρα από το κώδικα του Tric έγιναν και από εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων όπως το Nastran MSC και το ABAQUS. Οι διακριτοποιήσεις έγιναν με τριγωνικά στοιχεία της βιβλιοθήκης των προγραμμάτων αλλά και με στοιχεία δοκού η σύγκριση των οποίων εξάγει ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Στο Παράρτημα Β δίδονται αρχεία εισαγωγής δεδομένων για τα εμπορικά προγράμματα αλλά και για τον κώδικα του Tric. Θα διευκρινιστεί επίσης η διαδικασία με την οποία τα αρχεία εισαγωγής δεδομένων γίνονται συμβατά και από τα τρία προγράμματα.

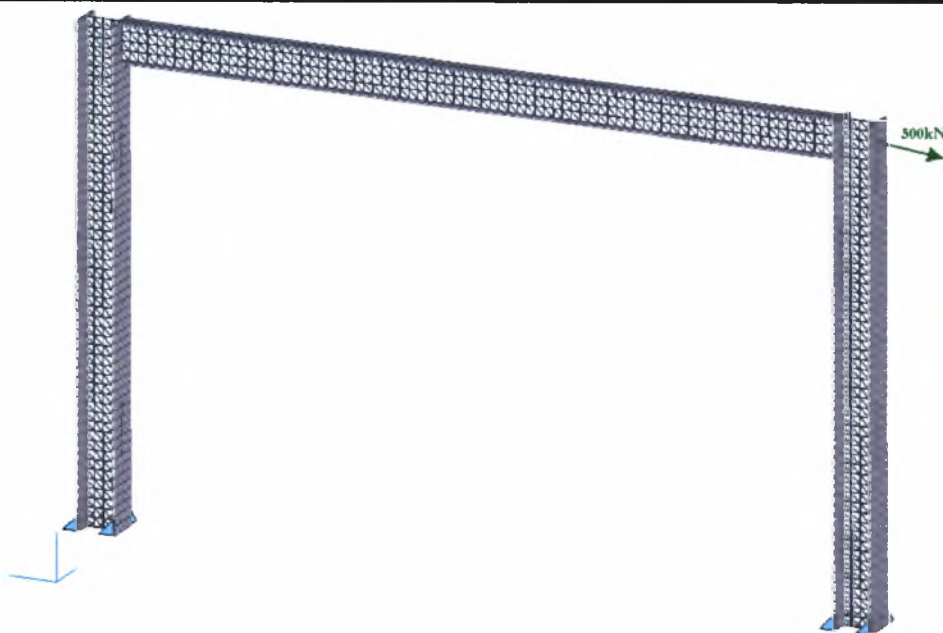
τα που είχαμε στη διάθεσή μας. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα μοντελοποίησης μεταλλικής κατασκευής με το στοιχείο Tric.



Σχήμα 7.18: Γεωμετρία, δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για το παράδειγμα της 5όροφης μεταλλικής κατασκευής με τη βοήθεια ενός προγράμματος «γεννήτορα» δικτύων.

7.3.1 Μεταλλικό Πλαίσιο Π

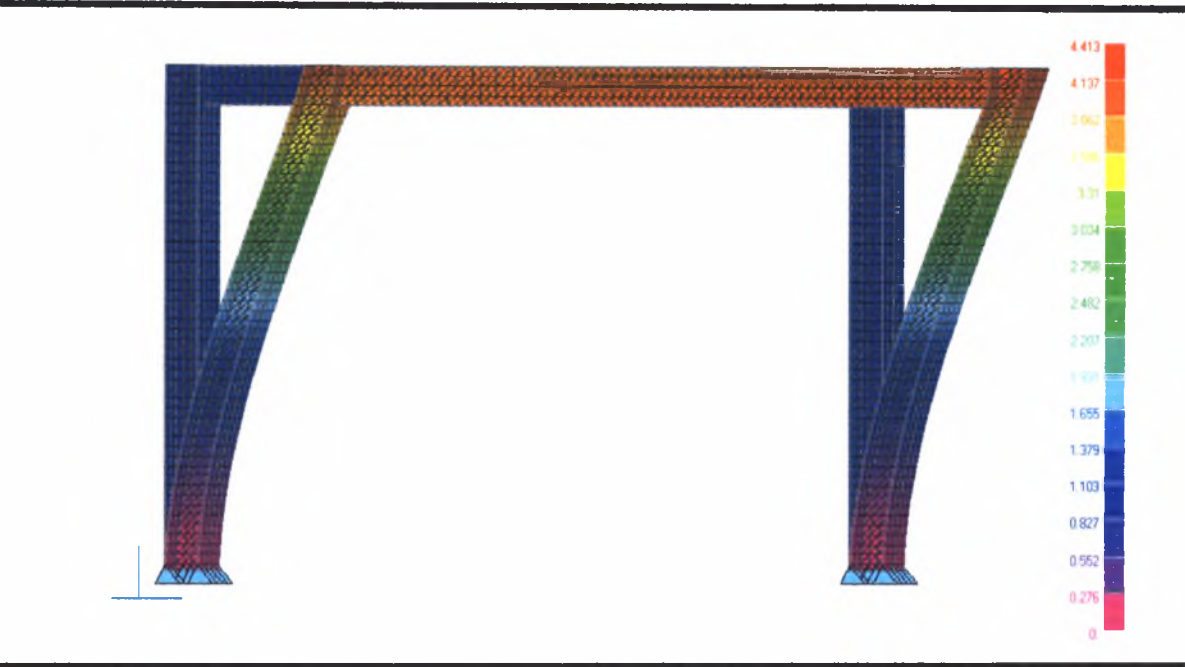
Ενδεικτικά θα αναφερθεί και το παρακάτω παράδειγμα ανάλυσης ενός μεταλλικού πλαισίου σχήματος Π με το ίδιο υλικό (χάλυβας) και χαρακτηριστικά με το προηγούμενο παράδειγμα. Το πλαίσιο αποτελείται από δυο υποστυλώματα HEB 300 με τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά: Ύψος Κορμού $H=300\text{mm}$, Πλάτος Πέλματος $B=300\text{mm}$, Πάχος Κορμού $S_k=10\text{mm}$ και Πάχος Πέλματος $S_p=20\text{mm}$. Οι δοκοί αποτελούνται από διατομές IPE 300 με τα εξής χαρακτηριστικά: Ύψος Κορμού: 300mm , Πλάτος Πέλματος 150mm , Πάχος Κορμού 7.1mm και Πάχος Πέλματος 10.7mm . Η φόρτιση είναι ένα συγκεντρωμένο μη γραμμικό φορτίο με μέγιστη τιμή τα 500kN . Το σημείο φόρτισης (κόμβος 1736) καθώς και άλλα χαρακτηριστικά απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 7.19.



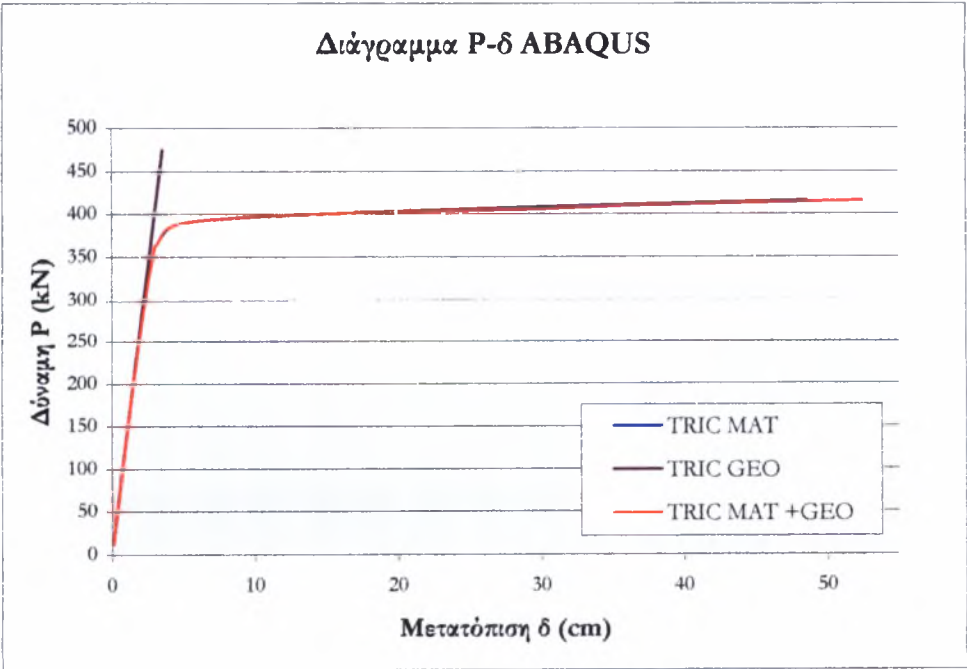
Σχήμα 7.19: Δίκτυο τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων. Χαρακτηριστικά: nodes=2115 και elements=3824. Το ύψος των υποστυλωμάτων είναι 4.0m και το άνοιγμα της δοκού είναι 6.0m .

Η ανάλυση του παραπάνω φορέα έγινε με τον κώδικα του Tric έτσι ώστε να αποδειχθεί ότι και σε εφαρμογές μεταλλικών πλαισίων, το Tric δίνει ορθά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα και σχήματα. Κατά την ανάλυση ο χρόνος ανάλυσης ήταν ίσος με 480sec . Οι αναλύσεις έγιναν για γεωμετρική μη γραμμικότητα (GEO), για μη γραμμικότητα του υλικού (MAT) και τέλος και για τα δύο είδη μη γραμμικότητας (GEO+MAT). Η διαφορά με το επόμενο παράδειγμα όπως

φαίνεται και στα σχήματα, ως προς τη διακριτοποίηση, είναι ότι στο πλαίσιο αυτό το δίκτυο είναι κανονικοποιημένο με ίδια (ως προς τη γεωμετρία) τριγωνικά στοιχεία και ίδια φορά της υποτεινουσάς τους διευκολύνοντας έτσι τις αναλύσεις.



Σχήμα 7.20: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με δίκτυο τριγωνικών στοιχείων, μετατοπίσεις με load factor 0,7 (Φόρτιση 350kN- Έναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης)

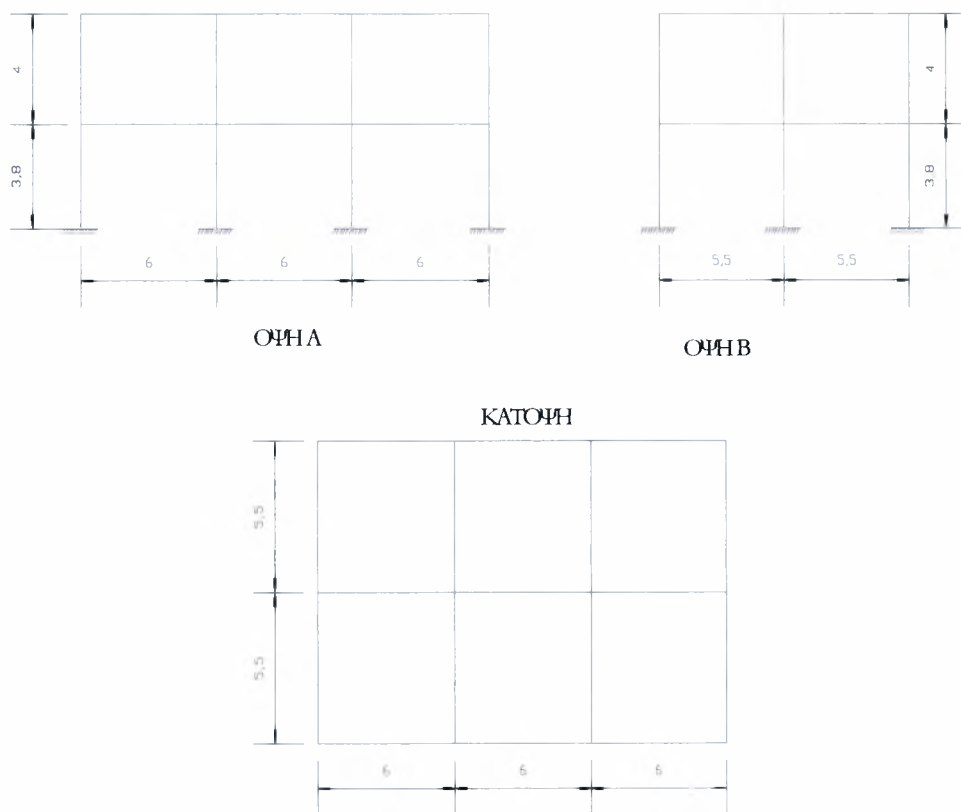


Σχήμα 7.21: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με πεπερασμένα στοιχεία Tric. (Επεξήγηση: MAT=material και GEO=geometry)

7.3.2 Διώροφη Μεταλλική Κατασκευή

- Γεωμετρία του Φορέα

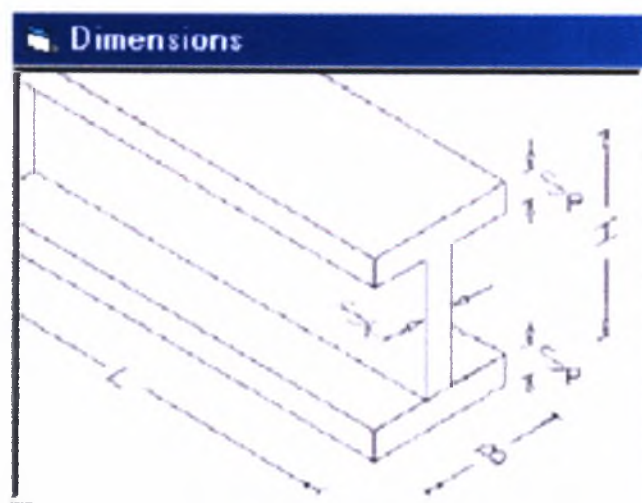
Ο φορέας που μοντελοποιήθηκε σε αυτό το παράδειγμα, είναι μια τυπική διώροφη μεταλλική κατασκευή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αποτελείται στην Όψη Α από τρία φατνώματα τα οποία έχουν μήκος 6,0μ. ενώ στην Όψη Β αποτελείται από δυο φατνώματα με μήκος 5,5μ. Τα ύψη στους δυο ορόφους είναι 3,8μ. και 4,0μ. αντίστοιχα.



Σχήμα 7.22: Γεωμετρία και διαστάσεις, για το παράδειγμα της 2όροφης μεταλλικής κατασκευής

Στα παραδείγματα που ακολουθούν οι διατομές που τοποθετήθηκαν σε δοκούς και υποστυλώματα είναι εμπορικές διπλού Τ. Πιο συγκεκριμένα τα υποστυλώματα αποτελούνται από διατομές ΗΕΒ 300 με τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά: Ύψος Κορμού $H=300\text{mm}$, Πλάτος Πέλματος $B=300\text{mm}$, Πάχος Κορμού $S_k=10\text{mm}$ και Πάχος Πέλματος $S_p=20\text{mm}$. Οι δοκοί αποτελούνται από διατομές ΙΡΕ 400 με τα εξής χαρακτηριστικά: Ύψος Κορμού: 400mm , Πλάτος Πέλματος 180mm , Πάχος Κορμού 10mm και

Πάχος Πέλματος 10mm. (Για λόγους ευκολίας στην μοντελοποίηση θεωρήθηκε ενιαίο πάχος κορμών και πελμάτων όλων των διατομών και ίσο με 10mm)



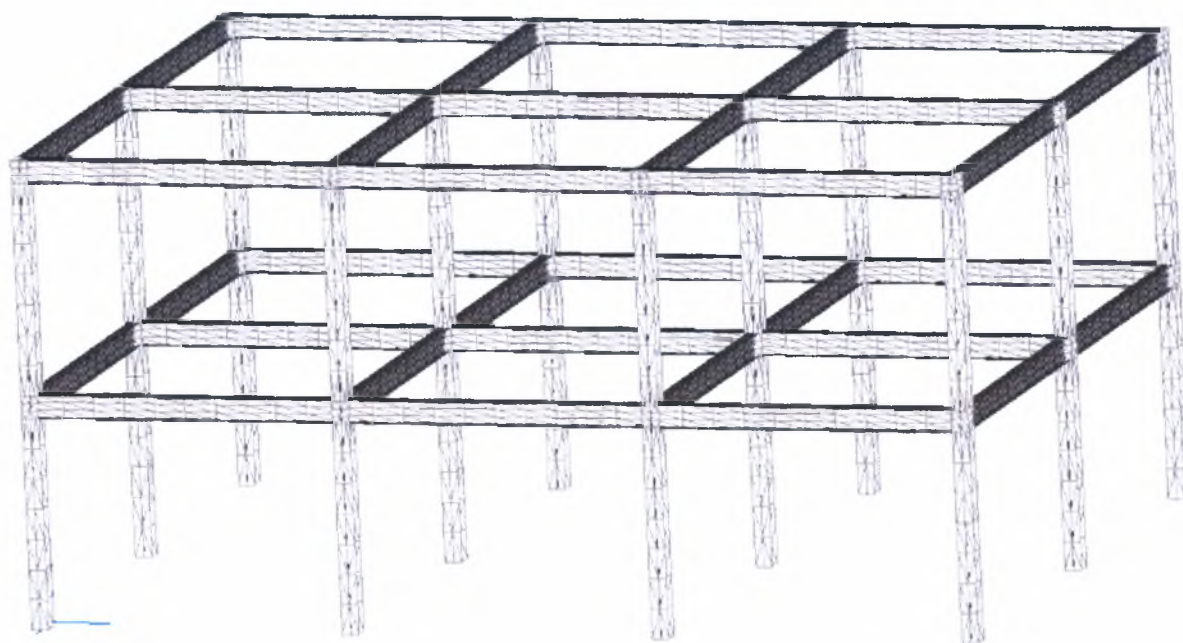
Σχήμα 7.23: Διαστάσεις των διατομών των δοκών και των υποστυλωμάτων-Επεξήγηση των συμβολισμών

- Στηρίξεις του Κελύφους

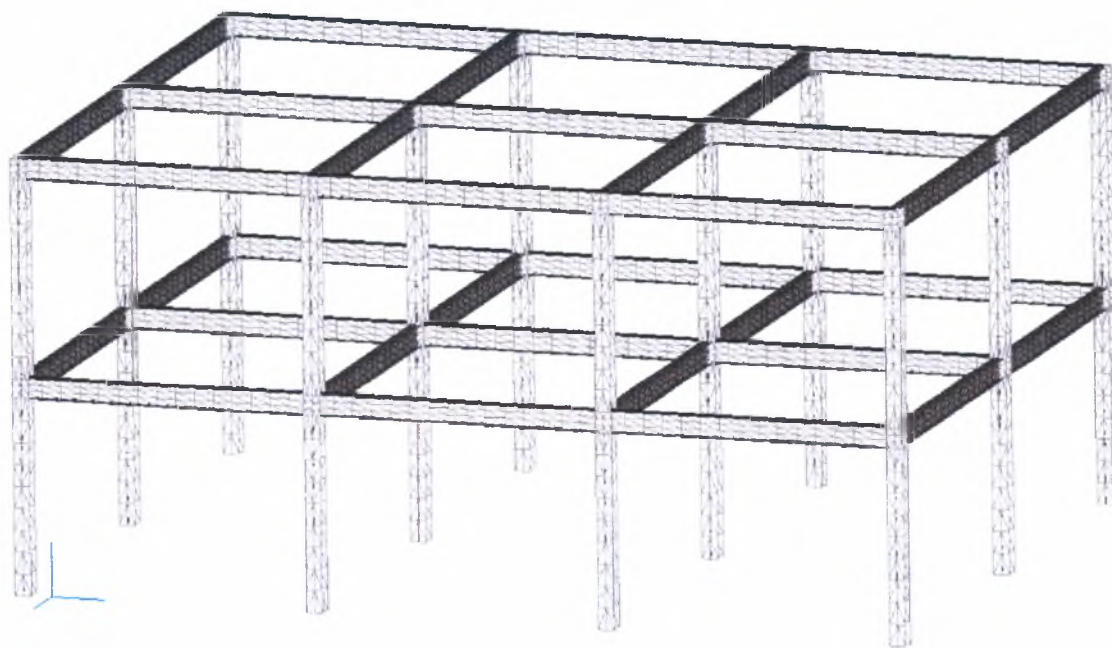
Το διώροφο πλαίσιο στηρίζεται στο έδαφος και με τα 12 υποστυλώματά του μέσω πλήρων πακτώσεων.

- Διακριτοποίηση του Φορέα

Οι διακριτοποιήσεις που έγιναν σε αυτό το μοντέλο ήταν τέσσερις. Οι δυο πρώτες έγιναν με τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο το οποίο έχει 6 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Οι άλλες δύο διακριτοποιήσεις έγιναν με στοιχεία δοκού (beam elements) της βιβλιοθήκης πεπερασμένων του NASTRAN MSC. Σε κάθε είδος πεπερασμένου στοιχείου πραγματοποιήθηκαν δυο διακριτοποιήσεις του μοντέλου. Με αραιό και πυκνό δίκτυο. Πιο συγκεκριμένα, για τα τριγωνικά στοιχεία έγιναν τα εξής δίκτυα. Αραιό Δίκτυο: 27840 Βαθμοί Ελευθερίας, 4724 κόμβους και 8560 στοιχεία. Πυκνό Δίκτυο: 38016 Βαθμοί Ελευθερίας, 6420 κόμβους και 11516 στοιχεία (Σχήματα 7.24-7.25). Τονίζεται ότι τα δίκτυα με τα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία δεν είναι κανονικοποιημένα, δηλαδή τα στοιχεία δεν έχουν ίδιο μέγεθος και κατεύθυνση υποτείνουσας, προσδίδοντας μιας επιπλέον δυσκολία στην ανάλυση με αυτά τα στοιχεία.

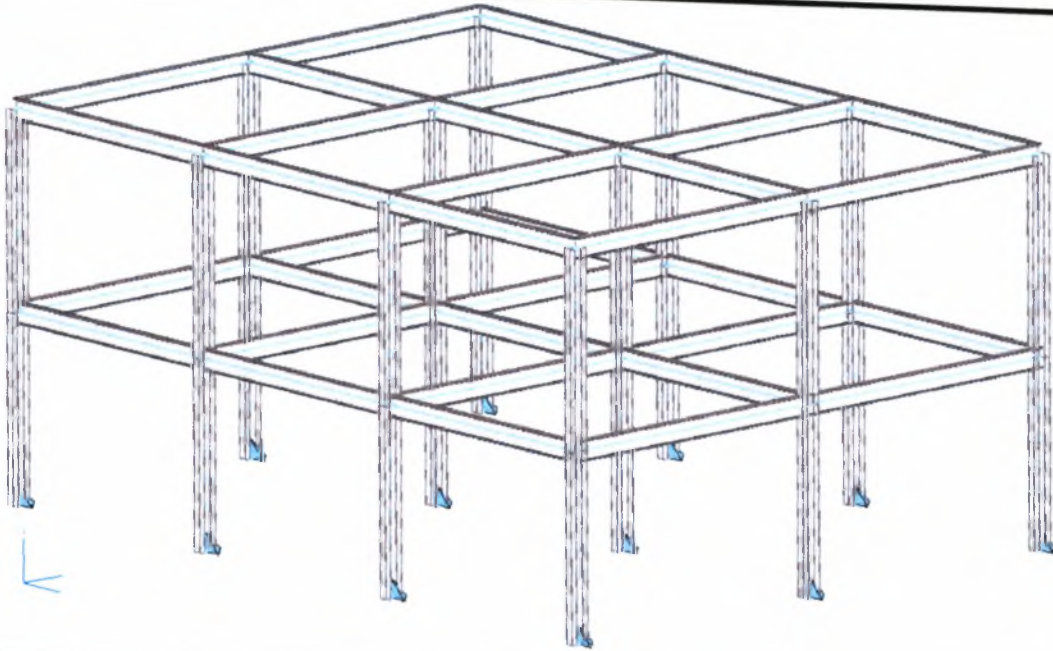


Σχήμα 7.24: Λραιό δίκτυο τριγωνικών πολυστρωματικών στοιχείων. Χαρακτηριστικά: d.o.f=27840, nodes=4724 και elements=8560

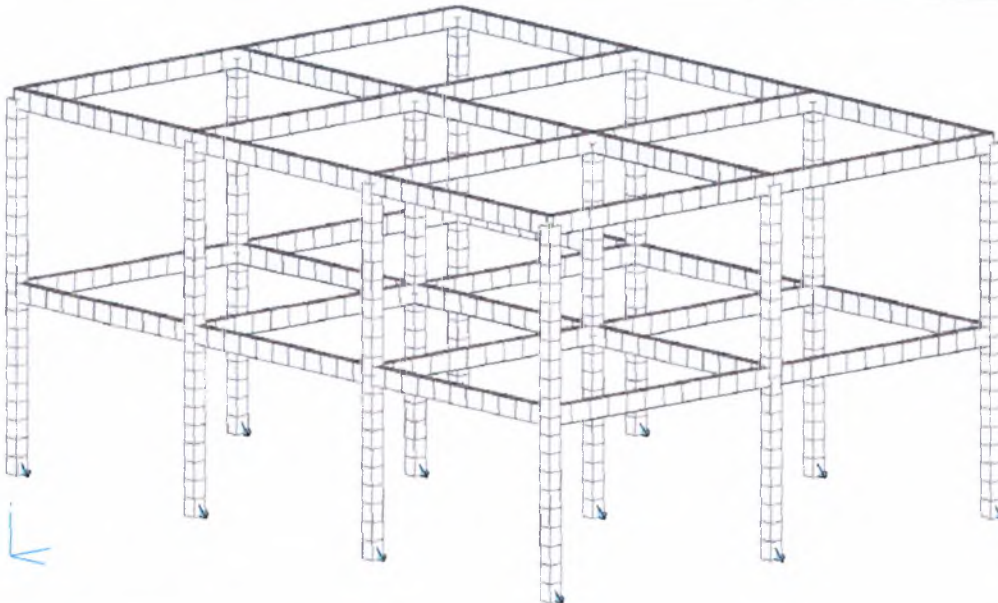


Σχήμα 7.25: Πυκνό δίκτυο τριγωνικών πολυστρωματικών στοιχείων. Χαρακτηριστικά: d.o.f=38016, nodes=6420 και elements=11516

Για τα στοιχεία δοκού έγιναν τα εξής δίκτυα. Αραιό Δίκτυο: 144 Βαθμοί Ελευθερίας, 36 κόμβους και 58 στοιχεία. Πυκνό Δίκτυο: 3576 Βαθμοί Ελευθερίας, 608 κόμβους και 630 στοιχεία (Σχήματα 7.26-7.27).



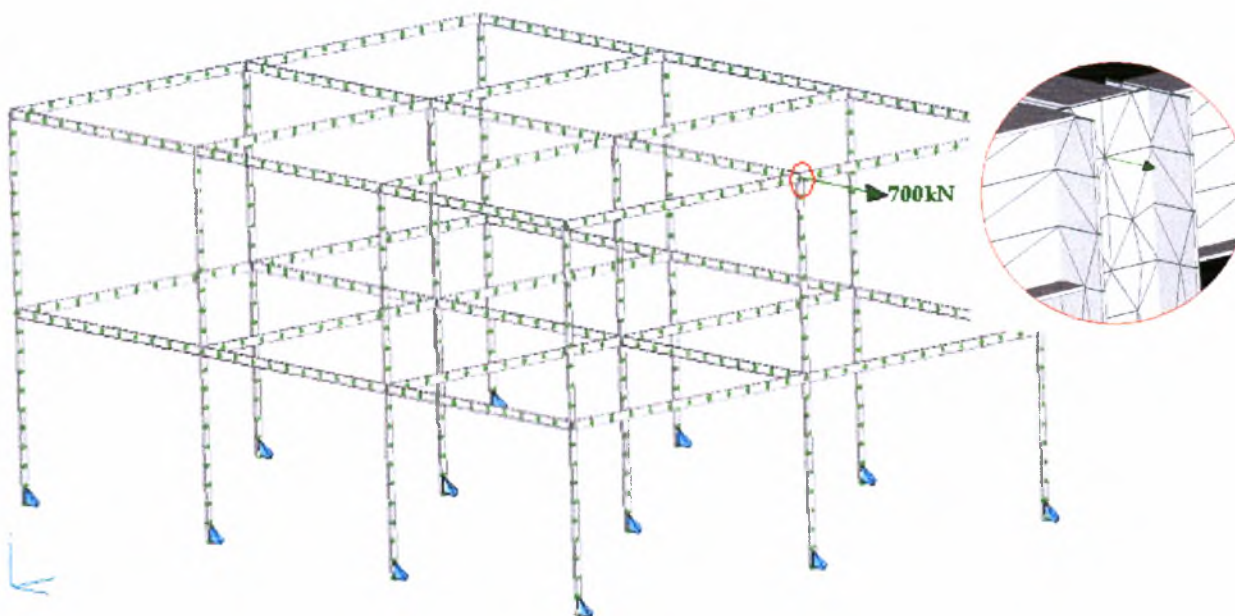
Σχήμα 7.26: Αραιό δίκτυο στοιχείων δοκού (beam elements). Χαρακτηριστικά: d.o.f=144, nodes=36 και elements=58



Σχήμα 7.27: Πυκνό δίκτυο στοιχείων δοκού (beam elements). Χαρακτηριστικά: d.o.f=3576, nodes=608 και elements=630

- Φόρτιση του Φορέα

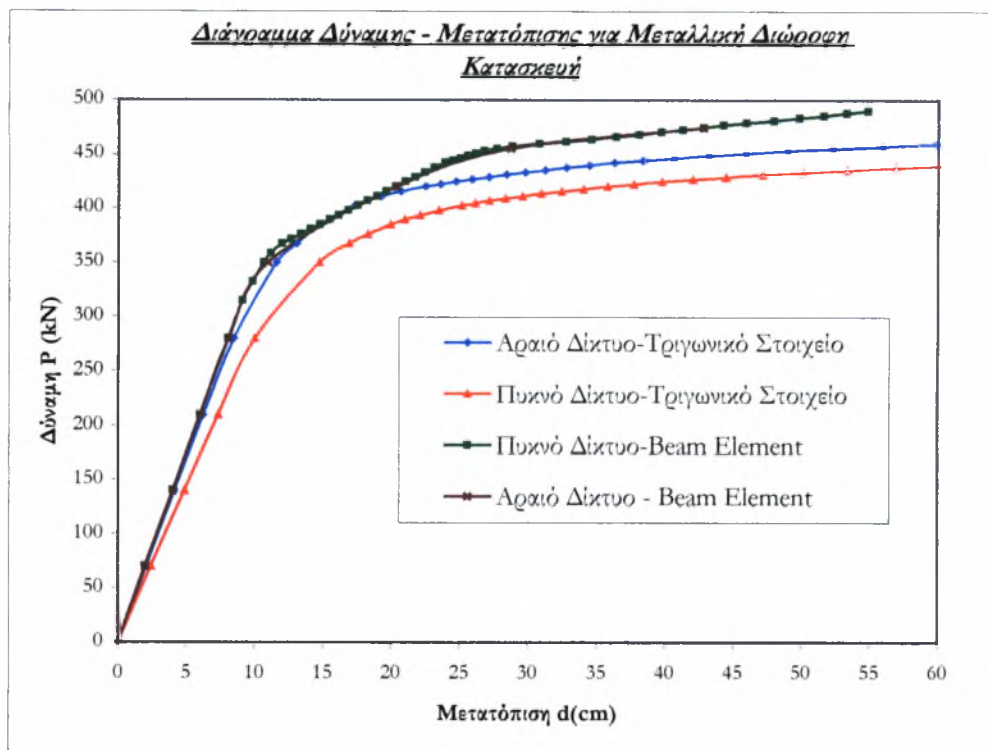
Η φόρτιση σε όλες τις διακριτοποιήσεις ήταν ίδια. Το φορτίο που επιβαλλόταν ήταν ένα συγκεντρωμένο φορτίο πάνω στον κόμβο που βρισκόταν στον δεύτερο όροφο του μεσαίου υποστυλώματος της Όψης Β. Πιο αναλυτικά το φορτίο ασκείται στους εξής, αντίστοιχους με τα προηγούμενα σχήματα, κόμβους: 4432, 5886, 32, 353. Επειδή η ανάλυση θα γίνει για μη γραμμικότητα του υλικού αλλά και γεωμετρίας θα αυξάνεται το φορτίο (με load factor) ώστε να πάρουμε τη πλήρη καμπύλη φορτίου – μετακίνησης σε γραμμική και μη γραμμική περιοχή. Η μέγιστη τιμή του φορτίου τέθηκε στα 700kN (Σχήμα 7.28)



Σχήμα 7.28: Σημείο, τρόπος και μέγιστη τιμή φόρτισης στην μεταλλική κατασκευή

- Χαρακτηριστικά του Προβλήματος

Το υλικό του κελύφους είναι χάλυβας Fe430 ή S275 με μέτρο ελαστικότητας $E=21000\text{kN/cm}^2$. Το μοντέλο στο οποίο θα υπακούει το κέλυφος είναι το ελαστοπλαστικό μοντέλο με μηδενική κράτυνση $E_T=0.0\text{kN/cm}^2$ (Σχήμα 7.3). Η τάση διαρροής είναι $f_y=27.5\text{kN/cm}^2$ ενώ το όριο θραύσης του υλικού είναι $f_u=43.0\text{kN/cm}^2$. Ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0,3$. Όλες οι αναλύσεις έγιναν με 25 φορτιστικά βήματα και από 18 δυνατές επαναλήψεις σε κάθε βήμα. Η επαναληπτική μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι η πλήρης μέθοδος Newton-Raphson. Το κριτήριο διαρροής είναι κατά Von-Mises και ο νόμος της κράτυνσης, είναι ισοτροπικός.

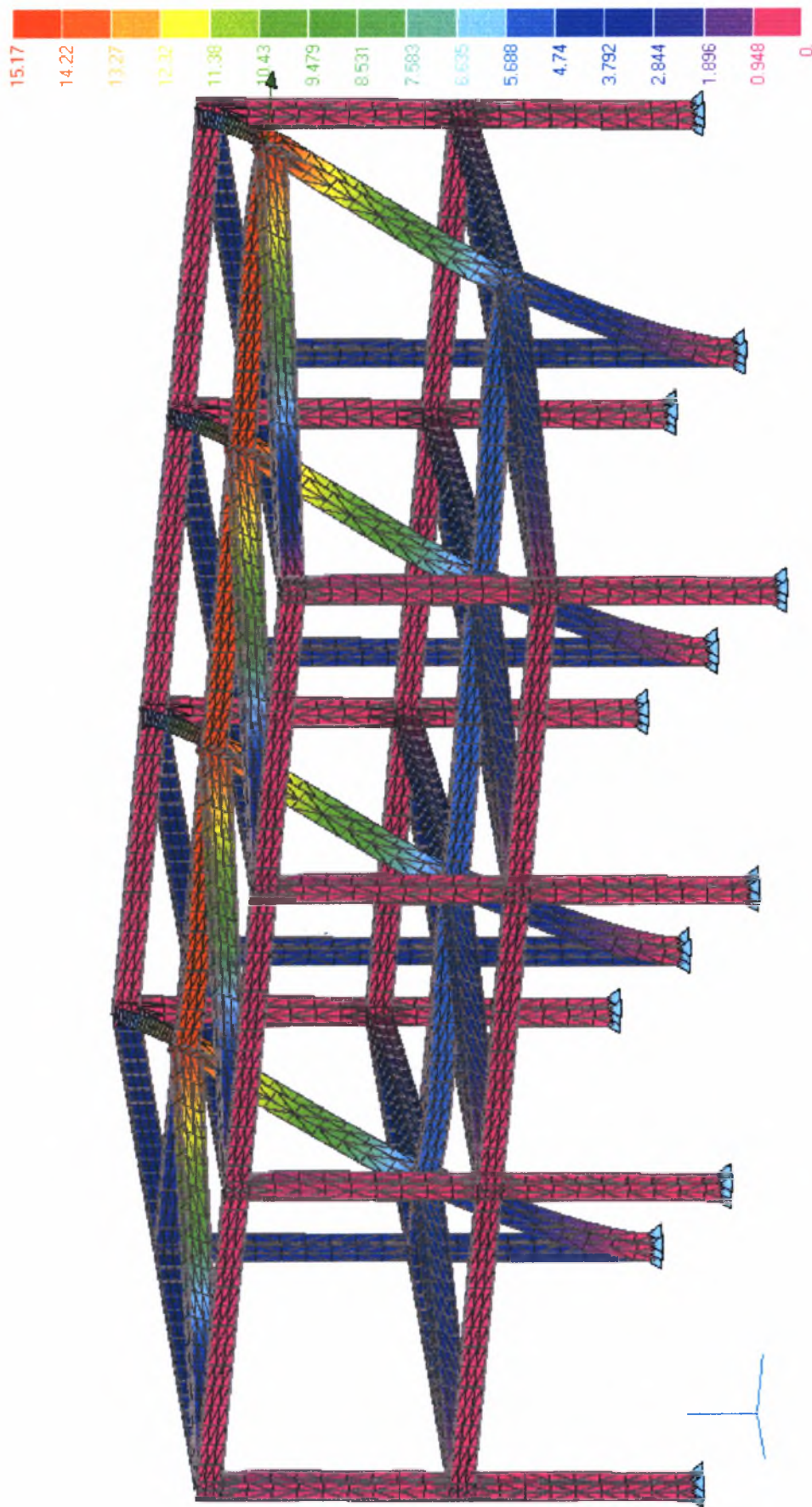


Σχήμα 7.29: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία και στοιχεία δοκού

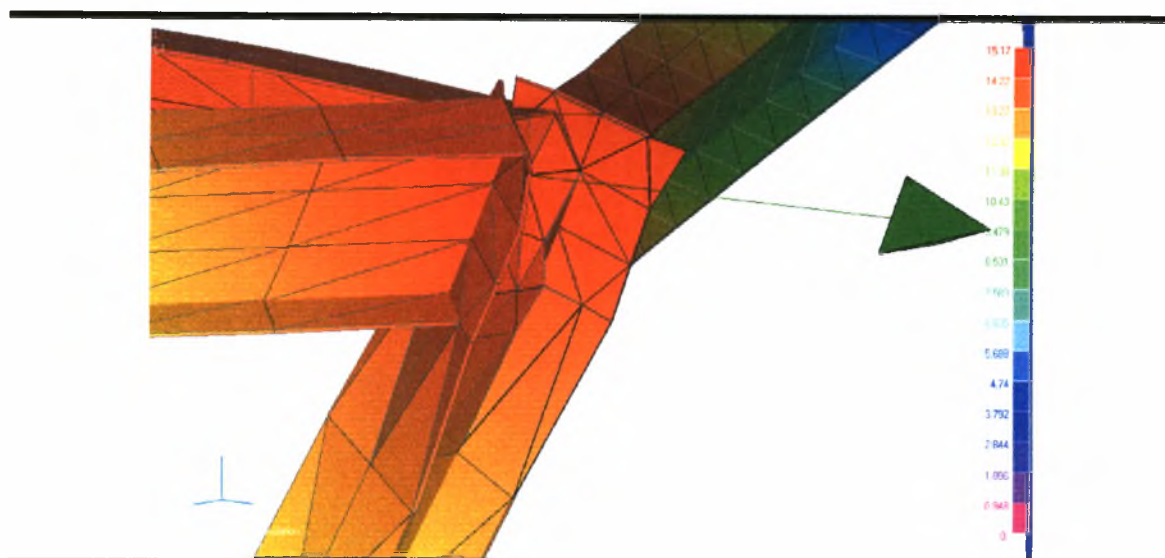
Στο παραπάνω σχήμα διακρίνονται οι καμπύλες Δύναμης-Μετατόπισης για τα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία και τα στοιχεία δοκού (beam elements) του προγράμματος Nastran για το σημείο που ασκείται η συγκεντρωμένη δύναμη (κόμβοι 4432, 5886, 32, 353 για τριγωνικά και στοιχεία δοκού αντίστοιχα). Οι χρόνοι ανάλυσης είναι οι εξής:

Τριγωνικό Πυκνό Δίκτυο	Τριγωνικό Αραιό Δίκτυο	Δοκοί Πυκνό Δίκτυο	Δοκοί Αραιό Δίκτυο
5360 sec	3095 sec	117 sec	27 sec

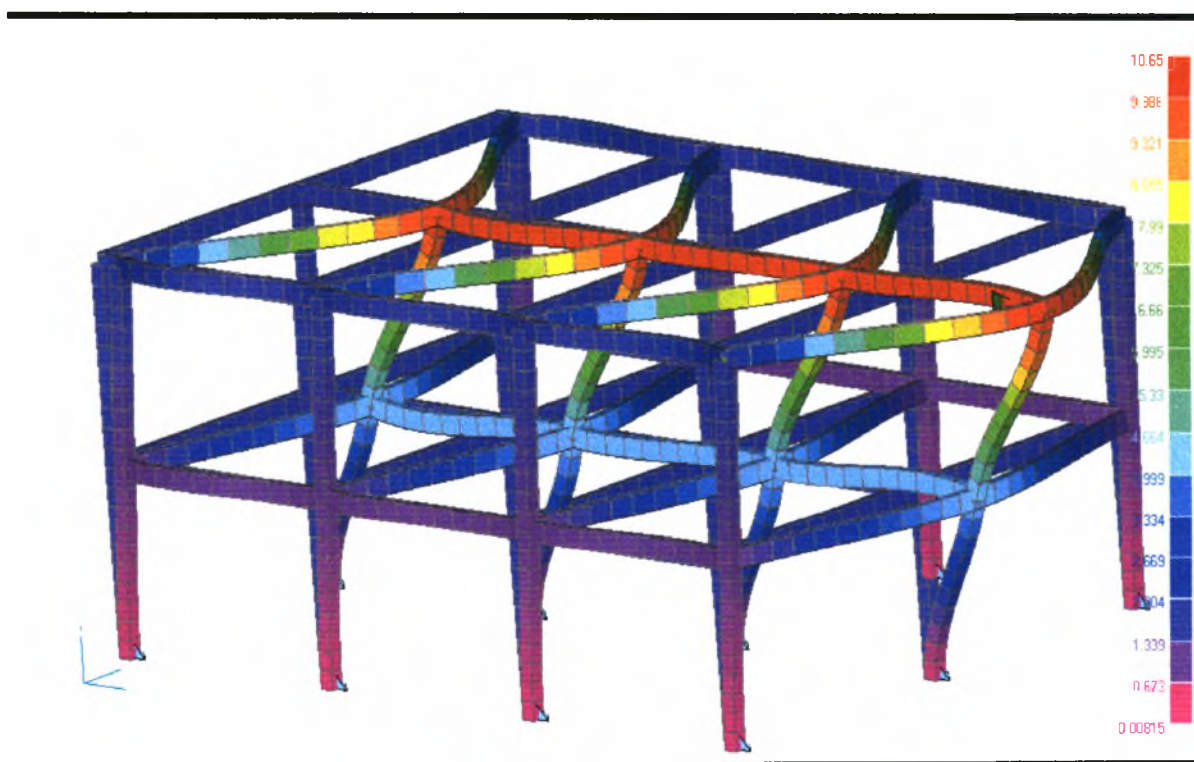
Μπορεί οι χρόνοι ανάλυσης με τα στοιχεία δοκού να είναι αρκετά μικρότεροι ωστόσο η ποιότητα των αποτελεσμάτων δεν είναι εξίσου καλή. Βλέπουμε ότι μόλις που η καμπύλη P-d του πυκνού δικτύου των στοιχείων δοκού πλησιάζει τη καμπύλη του αραιού δικτύου των τριγωνικών στοιχείων ενώ τα πραγματικά αποτελέσματα που προσεγγίζονται καλύτερα από το πυκνό τριγωνικό δίκτυο διαφέρουν από τις προηγούμενες αναλύσεις δίνοντας πιο συντηρητικά πορίσματα για το σημείο έναρξης της μη γραμμικής περιοχής και συνεπώς για τα όρια αντοχής της κατασκευής μας.



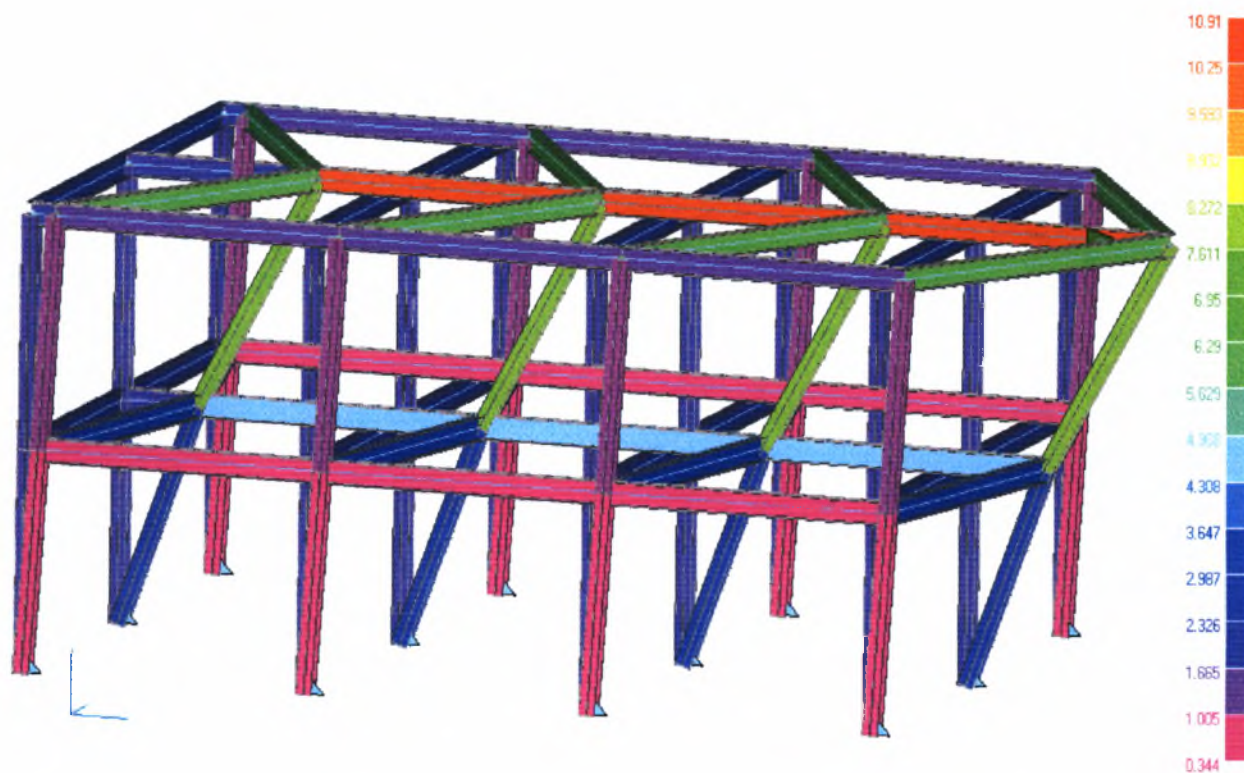
Σχήμα 7.30: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με πυκνό δίκτυο τριγωνικών στοιχείων, μετατοπίσεις με load factor 0,5 (Φόρτιση 350kN- Έναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης)



Σχήμα 7.31: Λεπτομέρεια μετατόπισης στον κόμβο 5886(κόμβος όπου επιβάλλεται το φορτίο), μετατοπίσεις με load factor 0,5 (Φόρτιση 350kN- Έναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης).



Σχήμα 7.32: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με πυκνό δίκτυο στοιχείων δοκού, μετατοπίσεις με load factor 0,5 (Φόρτιση 350kN- Έναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης)



Σχήμα 7.33: Αποτελέσματα ανάλυσης του μεταλλικού φορέα με αραιό δίκτυο στοιχείων δοκού, μετατοπίσεις με load factor 0,5 (Φόρτιση 350kN- Έναρξη Μη Γραμμικής Ανάλυσης)

Τα κριτήρια σύγκλισης τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση όλων των παραπάνω μοντέλων ήταν δύο. Το κριτήριο σύγκλισης εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων που αριθμητικά ήταν ίσο με 0,001 και το κριτήριο του έργου των παραπάνω δυνάμεων που αριθμητικά ήταν ίσο με 0,001 επίσης. Στα παραπάνω σχήματα οι μετακινήσεις που παρουσιάζονται είναι πολύ μεγενθυμένες αλλά πάντα στην ίδια κλίμακα από το πρόγραμμα για λόγους εποπτείας και ευκολότερη εξαγωγή συμπερασμάτων. Τέλος, όλες οι παραπάνω αναλύσεις έγιναν με επεξεργαστή Pentium IV στα 2.6 GHz και μνήμη RAM 512MB.

7.3 Ψευδοστατική Μέθοδος

Στο τέλος αυτής της εργασίας παίρνοντας αφορμή από το πρώτο παράδειγμα κελύφους που παρουσιάστηκε σε αυτό το κεφάλαιο (Κέλυφος μικρής καμπυλότητας - Κέλυφος Scordelis) παρατηρήθηκε ότι κατά τη φόρτιση του κελύφους και «μπαίνοντας» ο φορέας στη μη γραμμική περιοχή, υπάρχει ένα σημείο στο οποίο στην καμπύλη του διαγράμματος Φορτίου – Μετακίνησης υπάρχει μια έντονη βύθιση. Σε αυτό το σημείο, το κέλυφος, παρουσιάζει μια έντονη και απότομη μετακίνηση αποκτώντας αρνητική καμπυλότητα από αυτή που στην αρχή διέθετε. Με αυτό το τρόπο, ο φορέας αποκτά προς στιγμή μια καινούρια θέση ισορροπίας και κατόπιν με την εκ νέου φόρτιση του κελύφους συνεχίζεται η επιπλέον βύθιση.

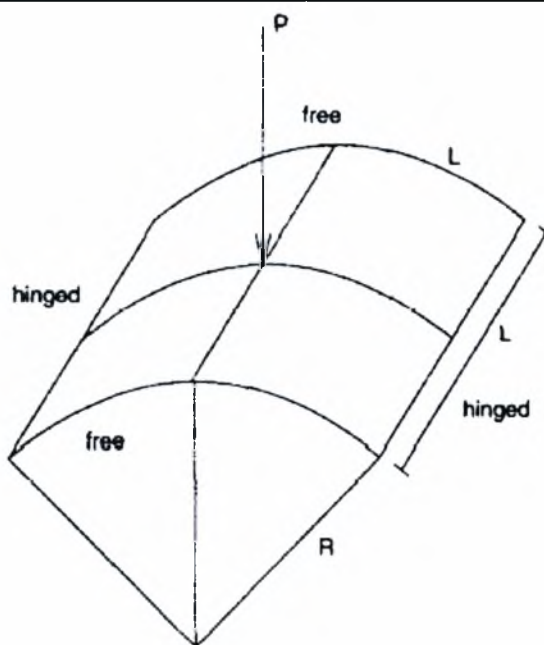
Τα μειονεκτήματα αυτής της συμπεριφοράς των κελυφών στην στατική μη γραμμική ανάλυσή τους είναι δύο. Αφενός στον υπολογιστικό χρόνο, ο οποίος αυξάνεται για να μπορέσουμε με την μη γραμμική στατική ανάλυση να δημιουργήσουμε αυτό το απότομο άλμα (αφού κατά την επαναληπτική διαδικασία της Newton-Raphson πραγματοποιούνται πολλές επαναλήψεις στο διάστημα αυτό) και αφετέρου η πτώση της τιμής του φορτίου κατά το διάστημα αυτό δεν είναι λογικό να συμβαίνει αφού κατά την εισαγωγή δεδομένων του προγράμματος, ορίστηκε να υπάρχει συνεχόμενη και σταδιακή αύξηση του φορτίου. Συνεπώς αυτή η πτώση που συμβαίνει στη τιμή του φορτίου αποτελεί ένα υπολογιστικό σφάλμα της μη γραμμικής στατικής μεθόδου.

Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί πως εκτός των προηγούμενων μειονεκτημάτων υπάρχει και κάτι ακόμη που καθιστά τη μη γραμμική στατική ανάλυση όχι τόσο αξιόπιστη για τέτοιου είδους προβλήματα και αυτό είναι η συμπεριφορά του φορέα μετά την απότομη αλλαγή της γεωμετρίας του (αρνητική καμπυλότητα). Πιο συγκεκριμένα από τα προηγούμενα παραδείγματα δεν φαινόταν αρκετά λογικό ο φορέας να ισορροπεί αμέσως μετά την απότομη βύθισή του και όπως θα γίνει φανερό και από την μέθοδο που ακολουθεί η συμπεριφορά του φορέα αμέσως μετά τη βύθιση, είναι μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος της οποίας εξαρτάται από την απόσβεση του συστήματος καθώς και από την ιδιοπερίοδο του φορέα.

Συνεπώς χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό μοντέλο ανάλυσης τα παραπάνω προβλήματα μπορούν να ξεπεραστούν. Πιο συγκεκριμένα, θα είναι εφικτό να παρακολουθή-

σουμε τη συμπεριφορά του φορέα ακόμα και μετά την αρνητική, απότομη καμπύλωσή του αφού η συμπεριφορά αυτή είναι ένα δυναμικό φαινόμενο (ταλάντωση). Επίσης σε αυτή την μοντελοποίηση θεωρείται ότι η τιμή του φορτίου ξεκινά από μηδενική τιμή, αυξάνεται γραμμικά έως μια χρονική στιγμή και κατόπιν η τιμή του παραμένει σταθερή.

Το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί, ακολουθεί τη φιλοσοφία του κελύφους Scordelis από το πρώτο παράδειγμα του κεφαλαίου αυτού. Τα νέα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας και του υλικού του φορέα δίνονται παρακάτω. Πρόκειται για ένα λεπτό κέλυφος πάχους $h=6,35\text{mm}$. Η ακτίνα καμπυλότητάς του είναι $R=2540\text{mm}$. Το κέλυφος διαχωρίζεται σε 4 ίσα κομμάτια όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.33. Οι μη καμπυλωμένες πλευρές του κάθε κομματιού του κελύφους έχουν μήκη 508mm και οι άλλες έχουν ακτίνα καμπυλότητας $R=2540\text{mm}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 7.34: Γεωμετρία, και είδος φόρτισης για το παράδειγμα ψευδοστατικής μεθόδου.

Στο κέλυφος αυτό, όπως φαίνεται και στο σχήμα οι μη καμπυλωμένες πλευρές είναι στηριγμένες αρθρωτά ενώ οι υπόλοιπες πλευρές είναι αδέσμευτες.

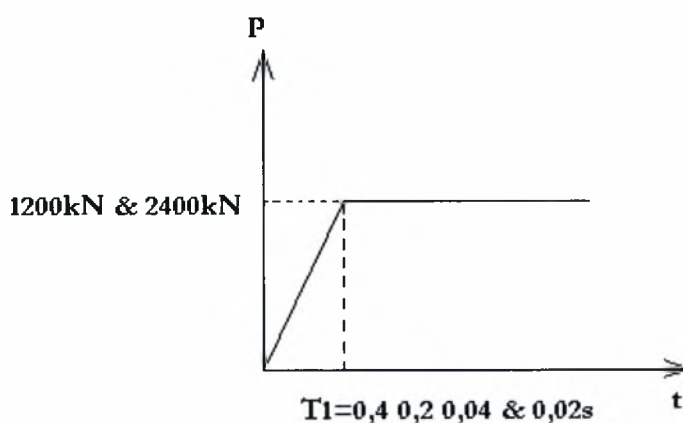
Η διακριτοποίηση του φορέα και συγκεκριμένα του καθενός από τα τέσσερα κομμάτια του κελύφους (εξετάζεται λόγω συμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο του κελύφους) έγινε με ένα δίκτυο τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων 8×8 δηλαδή με 128 τριγωνικά

στοιχεία στο σύνολο του ενός τετάρτου του κελύφους. Το πάχος του κελύφους διαχωρίζεται σε 4 ισοπαχή τμήματα. Εκτός του στοιχείου Tric, υπάρχουν δεδομένα και από άλλα πεπερασμένα στοιχεία, προτεινόμενα από τη διεθνή βιβλιογραφία.

Ο φορέας φορτίζεται με κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο P στο κέντρο του κελύφους. Επειδή υπάρχει γεωμετρική συμμετρία αλλά και συμμετρία φόρτισης, εξετάζεται μόνο το ένα τέταρτο του κελύφους. Συνεπώς και η τιμή του φορτίου για το κομμάτι της ανάλυσης γίνεται 4 φορές μικρότερο. Πιο συγκεκριμένα το συνολικό φορτίο είναι 1200Nt και για το κομμάτι που διακριτοποιείται το φορτίο είναι 400Nt.

Το υλικό του κελύφους έχει μέτρο ελαστικότητας $E=3105\text{Nt/mm}^2$. Το μοντέλο στο οποίο θα υπακούει το κέλυφος είναι το ελαστοπλαστικό μοντέλο με κράτυνση $E_T=210\text{N/mm}^2$ (Σχήμα 7.3). Η τάση διαρροής είναι $\sigma_F=1.8\text{N/mm}^2$ ενώ ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0.3$.

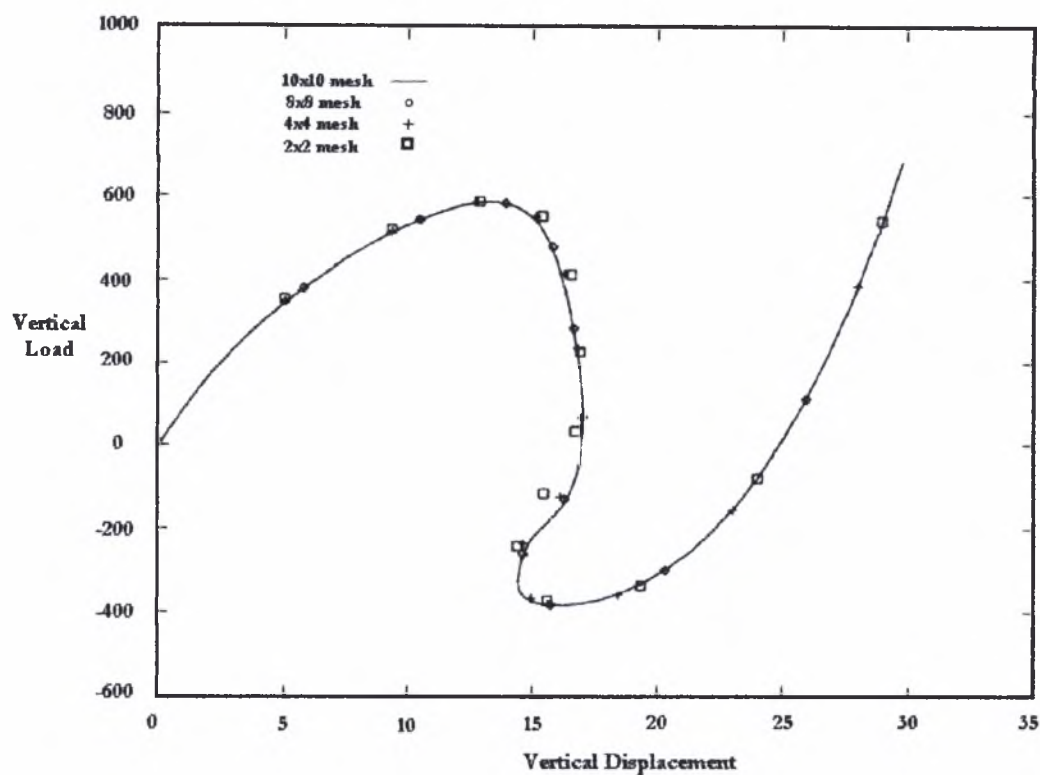
Στη παραμετρική διερεύνηση που έγινε, μεταβλήθηκαν τα χρονικά βήματα Δt καθώς και η χρονική στιγμή T_1 κατά την οποία η τιμή του φορτίου σταθεροποιείται στην τελική της τιμή (1200kN & 2400kN). Τα αποτελέσματα δίνονται σε διαγράμματα στις επόμενες σελίδες.



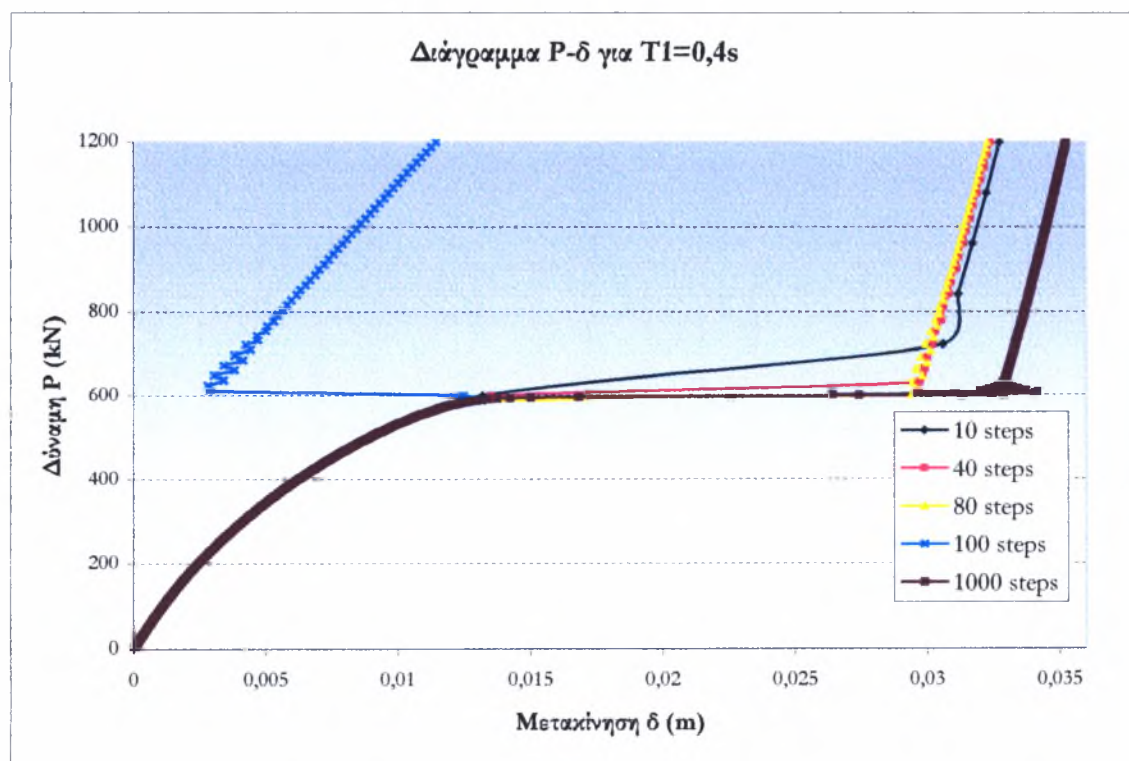
Σχήμα 7.35: Τρόπος φόρτισης στο παράδειγμα ψευδοστατικής μεθόδου (για το $\frac{1}{4}$ του κελύφους)

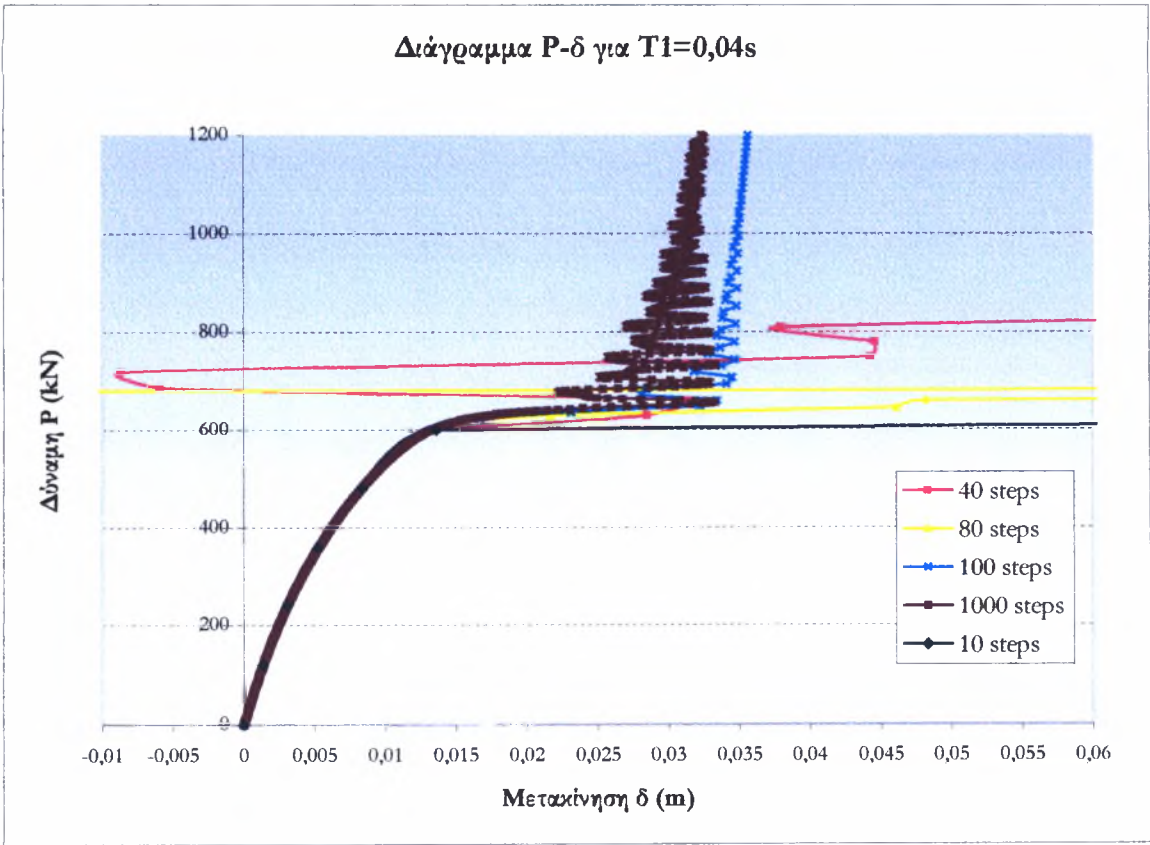
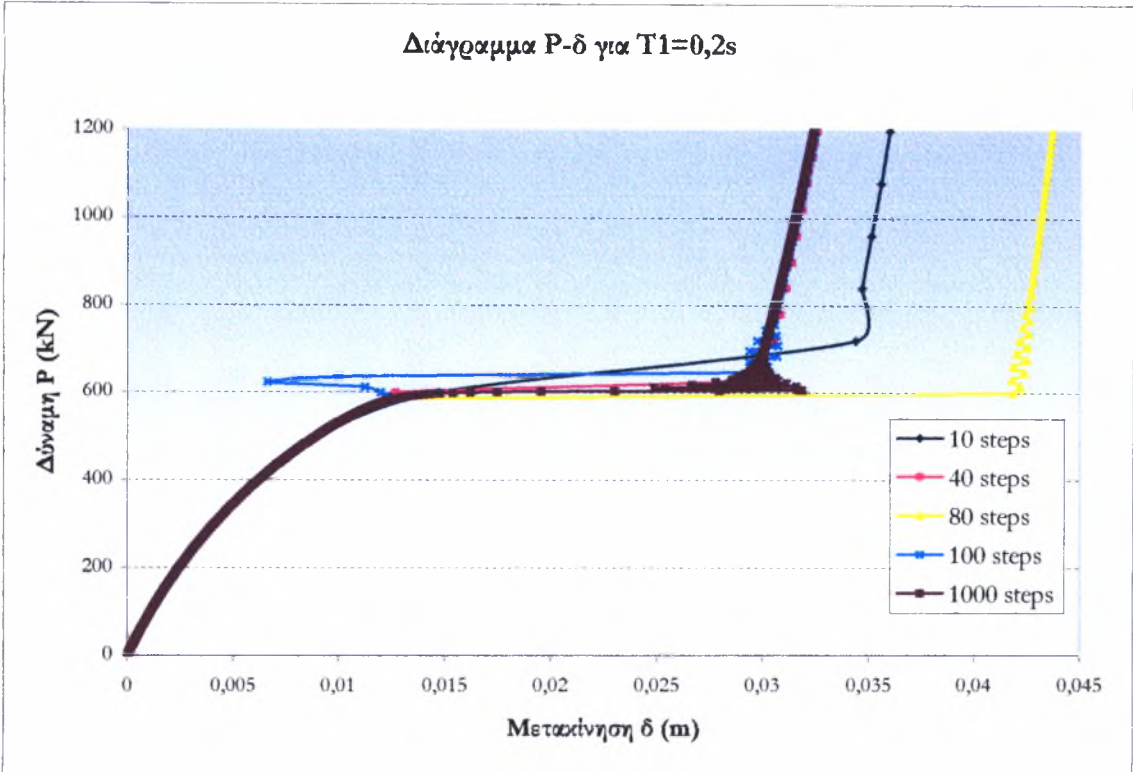
❖ Για συγκεντρωμένο φορτίο $P=1200\text{kN}$

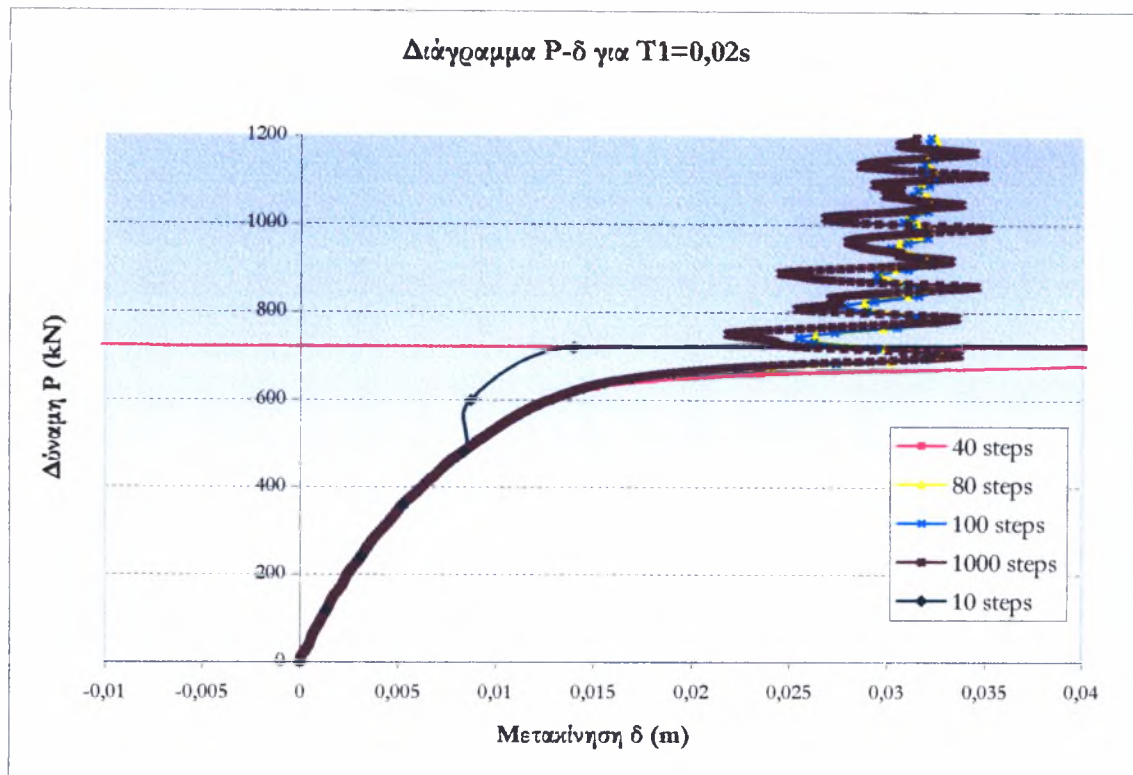
❖ Για συγκεντρωμένο φορτίο $P=1200\text{kN}$



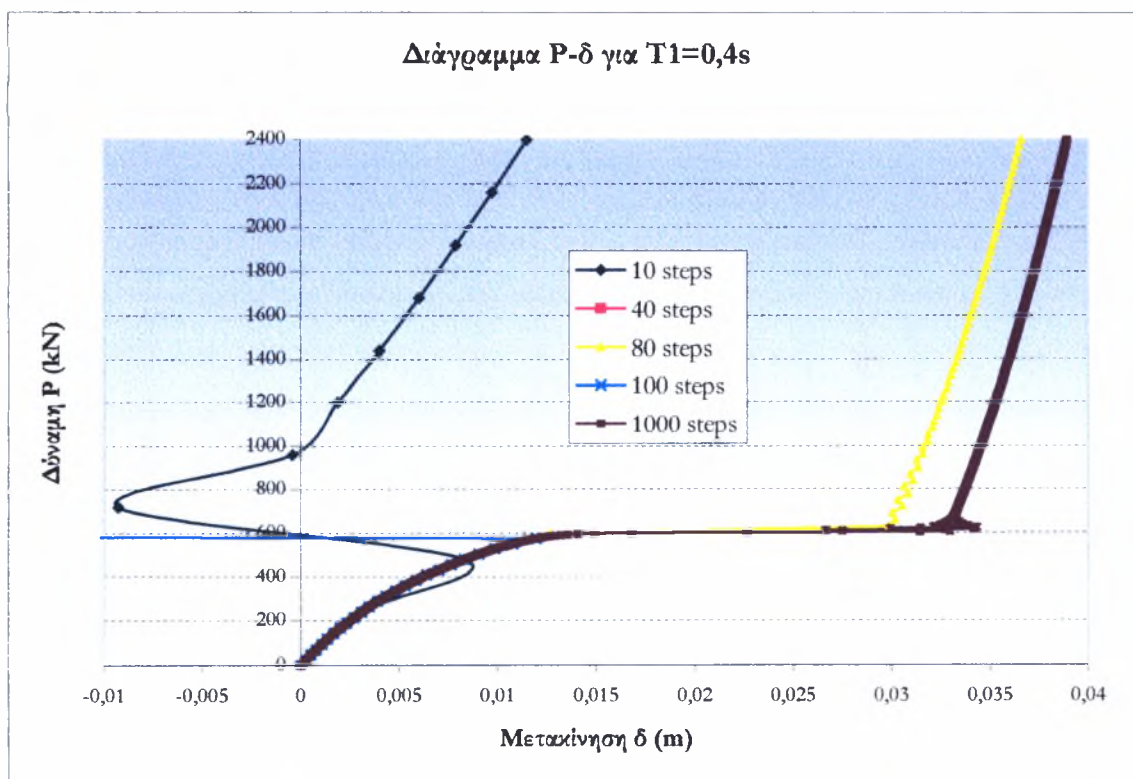
Σχήμα 7.36: Αποτελέσματα με το στοιχείο Tric με την κλασσική στατική μέθοδο

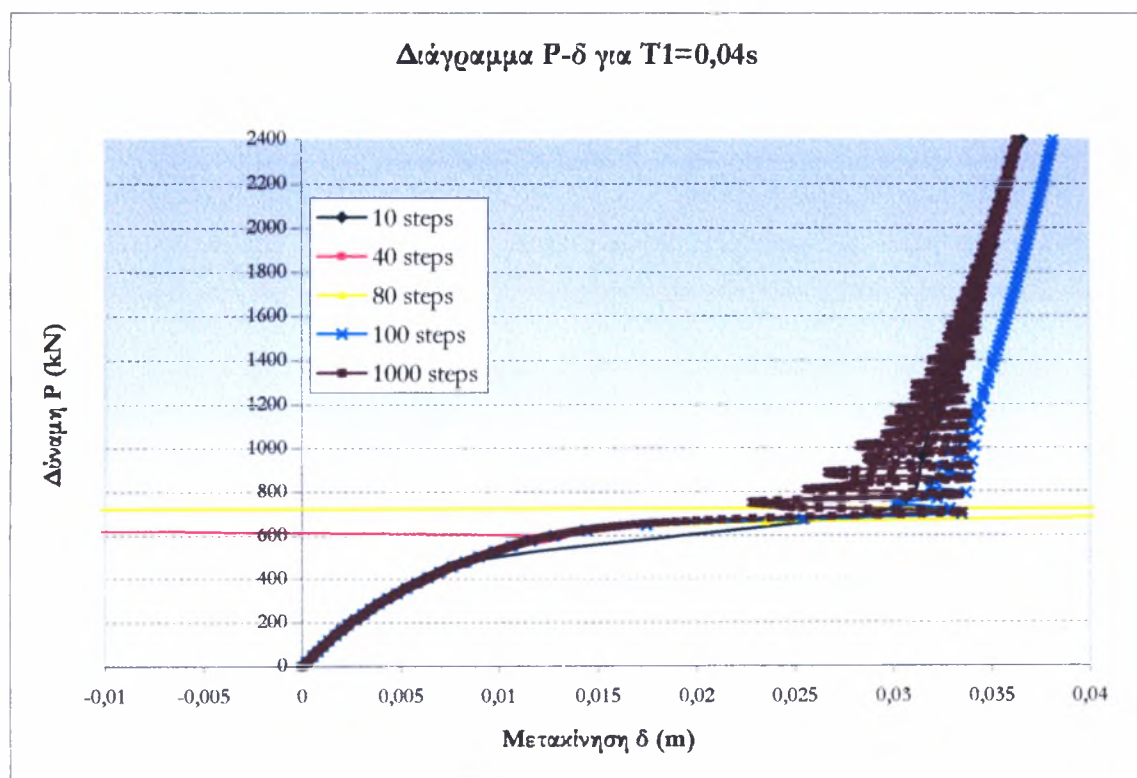
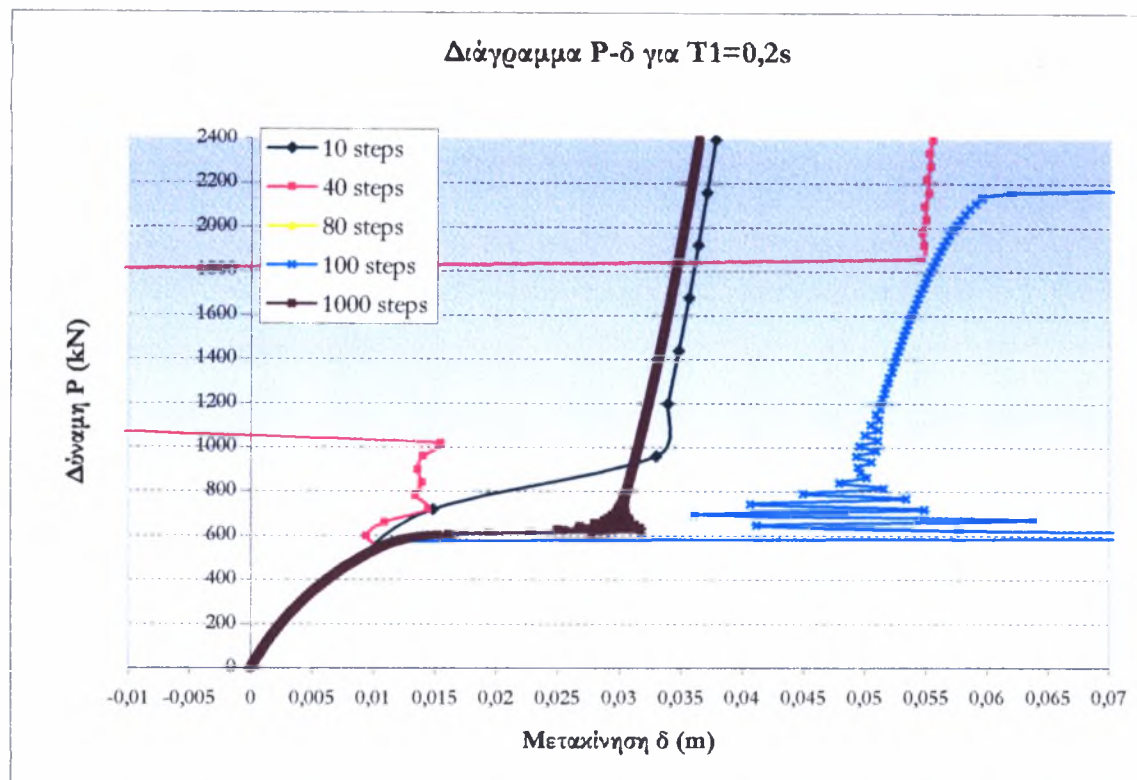


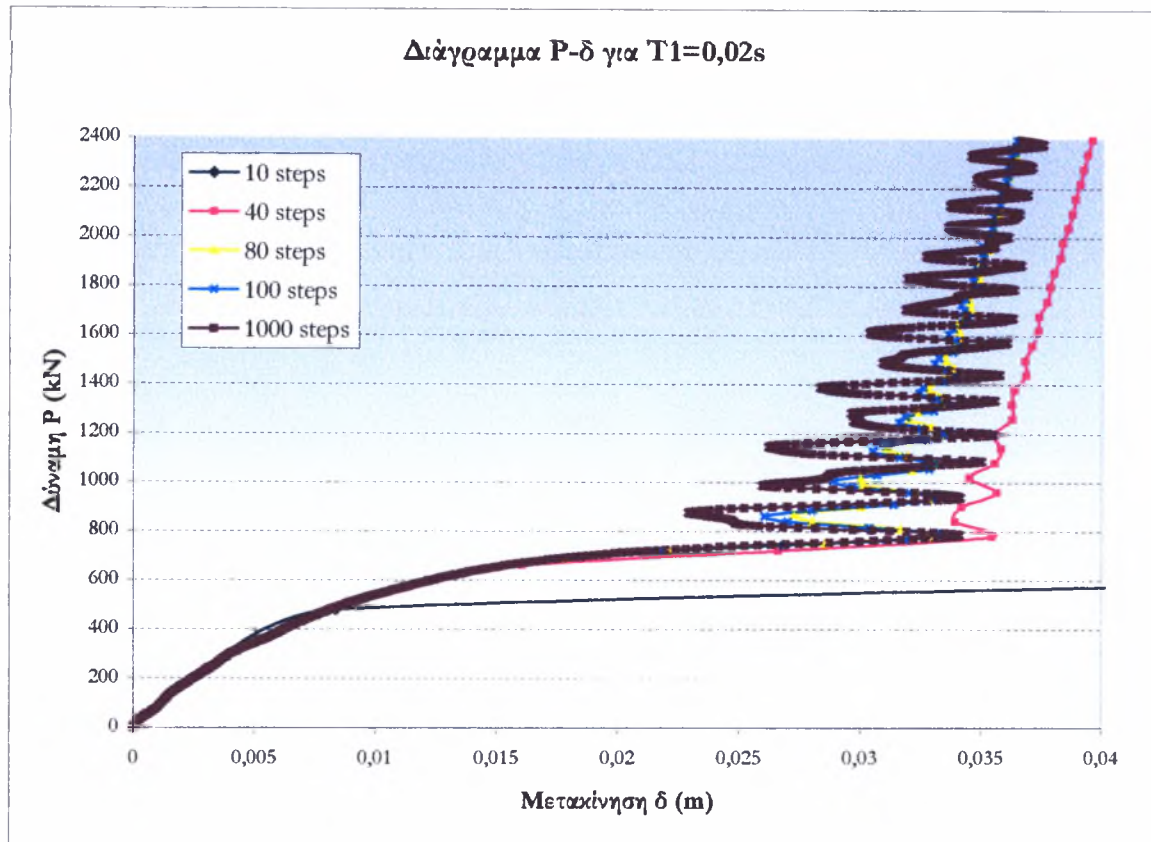




❖ Για συγκεντρωμένο φορτίο $P=2400kN$







Σχήμα 7.36: Διαγράμματα φόρτισης-μετακίνησης για διαφορετικά χρονικά βήματα, χρόνο T_1 και φόρτιση P .

Συμπεράσματα:

- Όλες οι προηγούμενες θεωρητικές παρατηρήσεις επαληθεύονται με τις επιλύσεις που έγιναν. Πιο συγκεκριμένα στις περισσότερες επιλύσεις παρατηρήθηκε ένα οριζόντιο πλατό αντί του απότομου άλματος στο διάγραμμα P-δ. Ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης μειώθηκε πάρα πολύ όπως φαίνεται και σε παρακάτω πίνακες. Τέλος παρατηρήθηκε ότι μετά την αρνητική καμπυλότητα, το κέλυφος, δεν εισέρχεται αμέσως σε κατάσταση ηρεμίας. Αντίθετα όπως ήταν αναμενόμενο, το κέλυφος εκτελεί κατακόρυφες φθίνουσες ταλαντώσεις.
- Παρατηρήθηκε πως με την αύξηση του φορτίου, τα αποτελέσματα συγκλίνουν δυσκολότερα για τα διαφορετικά χρονικά βήματα και η σύγκλιση αυτή απαιτεί μικρότερο χρόνο T_1 από ότι με μικρότερη τιμή φορτίου.

- Γενικά η αύξηση των χρονικών βημάτων οδηγεί σε καλύτερη σύγκλιση αποτελεσμάτων ιδίως όταν το T_1 είναι μικρό ($T_1=0,04s$ & $0,02s$) δηλαδή όταν η κλίση της γραμμικής αύξησης του φορτίου είναι μεγαλύτερη.
- Υπάρχουν ωστόσο περιπτώσεις όπου το συγκεκριμένο πλήθος χρονικών βημάτων (μικρός αριθμός βημάτων), οδηγεί σε αοριστία και σε αποτελέσματα που δεν αποκρίνονται στην ρεαλιστική συμπεριφορά του κελύφους.
- Όσο πιο δυναμικό είναι το φορτίο (μικρό T_1) η ψευδοστατική μέθοδος προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια την συμπεριφορά του φορέα.
- Συνεπώς ο κατάλληλος συνδυασμός των χρονικών βημάτων και ο χρόνος T_1 μπορεί να αποφέρει το άριστο αποτέλεσμα.

T1=0,4s		P=1200kN					P=2400kN				
Χρονικά Βήματα		10	40	80	100	1000	10	40	80	100	1000
Χρόνος (sec)		2,47	2,69	4,11	5,97	41,81	2,86	28,77	7,81	67,25	69,14

T1=0,2s		P=1200kN					P=2400kN				
Χρονικά Βήματα		10	40	80	100	1000	10	40	80	100	1000
Χρόνος (sec)		2,86	5,53	9,30	11,14	77,88	2,53	12,25	55,59	39,80	70,69

T1=0,04s		P=1200kN					P=2400kN				
Χρονικά Βήματα		10	40	80	100	1000	10	40	80	100	1000
Χρόνος (sec)		5,72	8,89	19,81	6,78	57,80	2,20	9,14	51,05	10,95	104,98

T1=0,02s		P=1200kN					P=2400kN				
Χρονικά Βήματα		10	40	80	100	1000	10	40	80	100	1000
Χρόνος (sec)		6,42	16,92	10,77	12,72	101,92	7,30	5,89	9,80	12,34	120,78

Πίνακας 7.3: Χρόνοι Επιλύσεων με την Ψευδοστατική Μέθοδο.

Παράρτημα **A** Φυσική γεωμετρία στο επίπεδο

A.1 Το βασικό τρίγωνο

Το βασικό τρίγωνο φαίνεται στο σχήμα Α-1. Για κάθε τρίγωνο ορίζονται σε μητρώα 3x3 οι εξής ποσότητες :

- Τα μήκη

$$l = \begin{bmatrix} l_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & l_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & l_\gamma \end{bmatrix} \quad [A.1]$$

- Τα ύψη

$$h = \begin{bmatrix} h_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & h_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & h_\gamma \end{bmatrix} \quad [A.2]$$

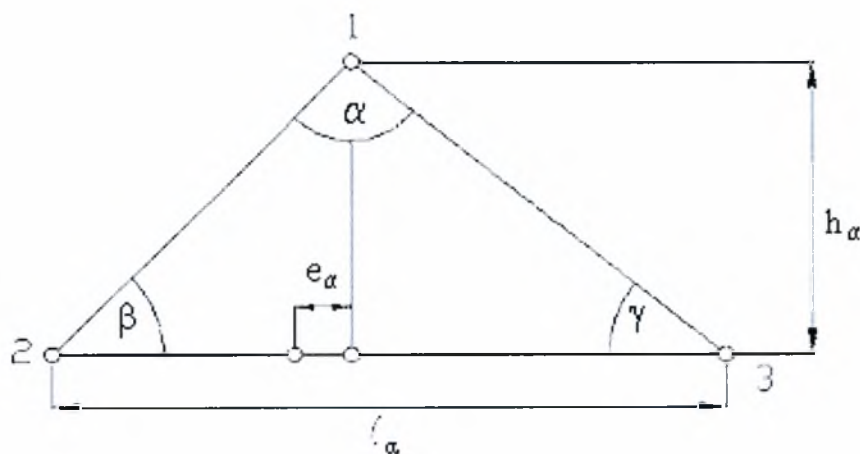
- Τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών του τριγώνου

$$s = \begin{bmatrix} s_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & s_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & s_\gamma \end{bmatrix}, \quad s_\alpha = \sin \alpha \quad [A.3]$$

$$c = \begin{bmatrix} c_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_\gamma \end{bmatrix}, \quad c_\alpha = \cos \alpha \quad [A.4]$$

- Η εκκεντρότητα η οποία δηλώνει την απόκλιση από το ισόπλευρο τρίγωνο

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu_\beta & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu_\gamma \end{bmatrix}, \quad \mu_\alpha = \frac{2e_\alpha}{l_\alpha} = \frac{l_\gamma^2 - l_\beta^2}{l_\alpha^2} \quad [A.5]$$



Σχήμα Α-1 : Το βασικό τρίγωνο

A.2 Ορισμός φυσικών (τριγωνικών) συντεταγμένων

Οι φυσικές ή τριγωνικές συντεταγμένες ενός σημείου **P** ορίζονται ως εξής :

- Πρώτη φυσική συντεταγμένη

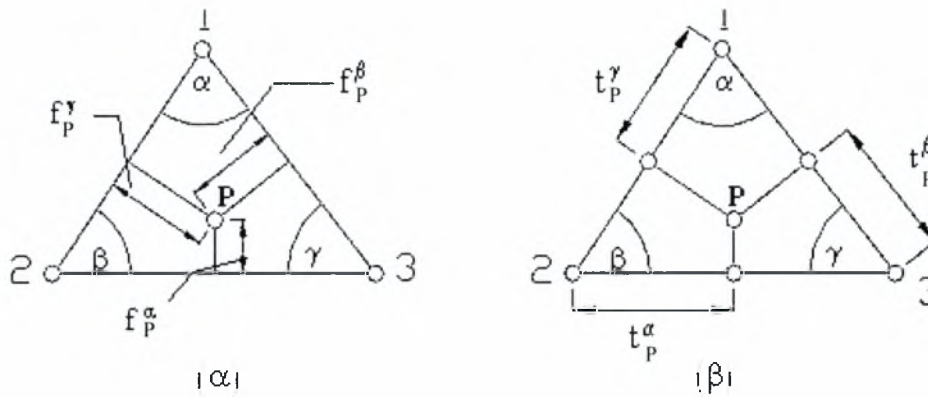
$$\zeta = h^{-1} f = \begin{Bmatrix} \zeta_\alpha \\ \zeta_\beta \\ \zeta_\gamma \end{Bmatrix} \quad [A.6]$$

όπου f_p^α είναι κάθετη απόσταση από το σημείο **P** στην πλευρά α . Στο πεπερασμένο στοιχείο *Tric* το σημείο **P** είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων. Αντίστοιχα ορίζονται και οι ποσότητες f_p^β και f_p^γ (Σχήμα Α-2α) :

$$f = \begin{Bmatrix} f_p^\alpha \\ f_p^\beta \\ f_p^\gamma \end{Bmatrix} \quad [A.7]$$

- Δεύτερη φυσική συντεταγμένη

$$\eta = l^{-1} t = \begin{Bmatrix} \eta_\alpha \\ \eta_\beta \\ \eta_\gamma \end{Bmatrix} \quad [A.8]$$



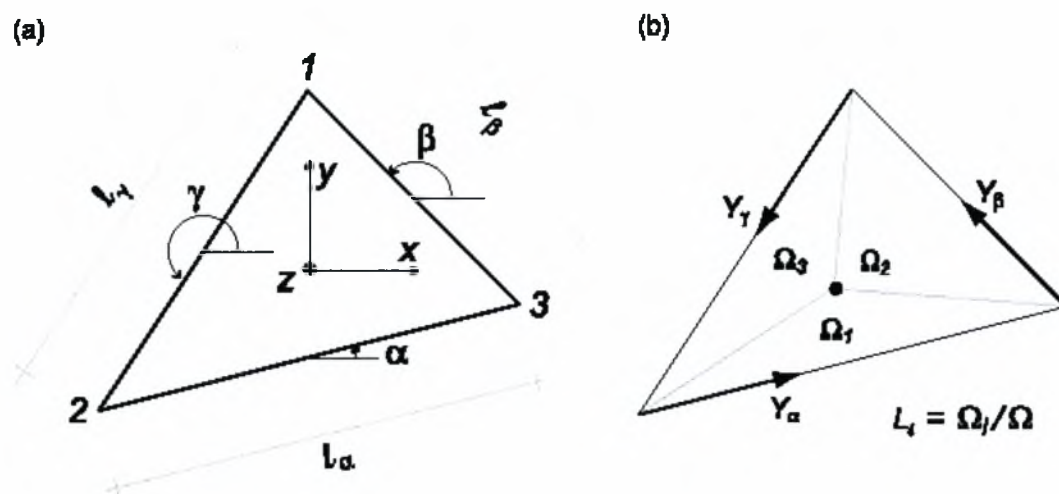
Σχήμα Α-2: (α) στοιχεία μητρώου f (β) στοιχεία μητρώου t

όπου $t_P^α$ είναι η απόσταση από την κορυφή 2 (αρχή πλευράς α) μέχρι το σημείο που η κάθετη από το σημείο P στην πλευρά α, τέμνει την πλευρά αυτή. Αντίστοιχα ορίζονται και οι ποσότητες $t_P^β$ και $t_P^γ$ (Σχήμα Α-2β) :

$$t = \begin{Bmatrix} t_P^α \\ t_P^β \\ t_P^γ \end{Bmatrix} \quad [A.9]$$

Οι φυσικές ή τριγωνικές συντεταγμένες συχνά αναφέρονται και ως εμβαδικές συντεταγμένες (area coordinates). Αυτό προκύπτει από το (Σχήμα Α-3) ως :

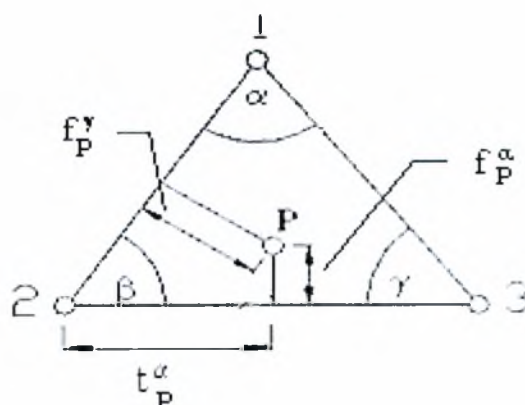
$$\zeta_a = \frac{f^α}{h_a} = \frac{f^α l_a}{h_a l_a} = \frac{\frac{1}{2} f^α l_a}{\frac{1}{2} h_a l_a} = \frac{\Omega_1}{\Omega} \quad [A.10]$$



Σχήμα Α-3 : Εμβαδικές συντεταγμένες

Μεταξύ f^a και t^a ισχύει ο ακόλουθος μετασχηματισμός (Σχήμα Α-4) :

$$t^a = \frac{1}{s_\beta} \cdot (c_\beta f^a + f^\gamma) \quad [A.11]$$

Σχήμα Α-4: Μετασχηματισμός μεταξύ f^a και t^a

Με κυκλική εναλλαγή των δεικτών έχουμε :

$$t = \begin{Bmatrix} t_p^\alpha \\ t_p^\beta \\ t_p^\gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & 1 \\ 1 & c_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_p^\alpha \\ f_p^\beta \\ f_p^\gamma \end{Bmatrix} \quad [A.12]$$

A.3 Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Στο σύστημα X^1OX^2 (Σχήμα Α-5) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ορίζονται ως :

$$x_1 = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{Bmatrix}, \quad x_2 = \begin{Bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix}, \quad x_3 = \begin{Bmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \end{Bmatrix} \quad [A.13]$$

Με βάση τη σχέση [Α.10] έχουμε :

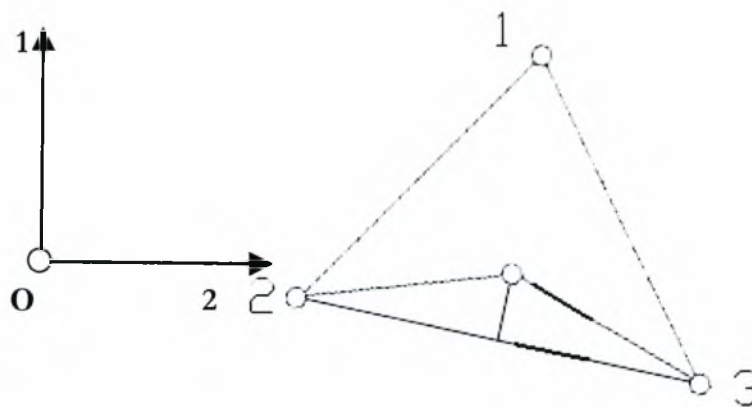
$$\zeta_a = \frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2^1 & x_3^1 & x_1^1 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_1^2 \end{vmatrix} = \zeta_a^0 + \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} x_2^2 - x_3^2 & x_3^1 - x_2^1 \end{bmatrix} x_1 \quad [A.14]$$

Με κυκλική εναλλαγή των δεικτών παίρνουμε :

$$\zeta = \zeta^0 + T_p \cdot x \quad [A.15]$$

όπου

$$T_p = \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} x_2^2 - x_3^2 & x_3^1 - x_2^1 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_1^1 - x_3^1 \\ x_1^2 - x_2^2 & x_2^1 - x_1^1 \end{bmatrix} \quad [A.16]$$



Σχήμα Α-5 : Το τρίγωνο στο σύστημα X^1OX^2

Επιλύοντας το πιο πάνω σύστημα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Grammer παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
 1 &= \zeta_a + \zeta_b + \zeta_\gamma \\
 x_1 &= x_1^1 \zeta_a + x_2^1 \zeta_b + x_3^1 \zeta_\gamma \\
 x_2 &= x_1^2 \zeta_a + x_2^2 \zeta_b + x_3^2 \zeta_\gamma
 \end{aligned}
 \tag{A.17}$$

A.4 Παράγωγοι κατά διεύθυνση

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $F(\zeta_a, \zeta_b, \zeta_\gamma)$ κατά τη διεύθυνση r ορίζεται ως:

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial r}
 \tag{A.18}$$

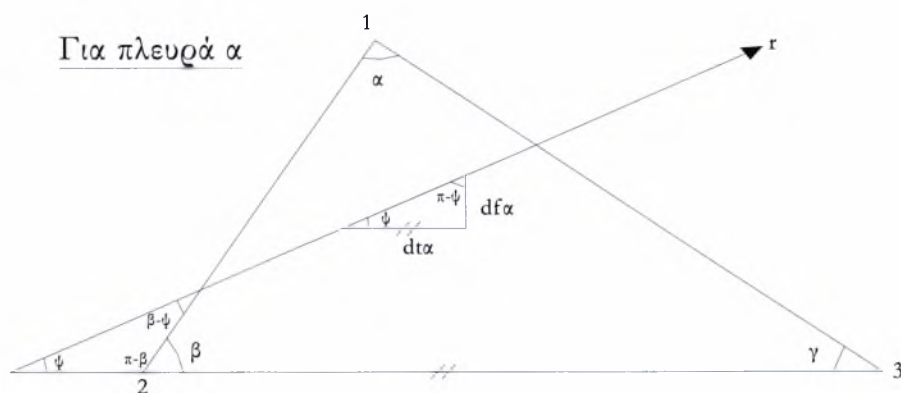
όπου:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \zeta_\alpha} & \frac{\partial F}{\partial \zeta_\beta} & \frac{\partial F}{\partial \zeta_\gamma} \end{bmatrix} \frac{d\zeta}{dr} = \begin{bmatrix} \frac{d\zeta_\alpha}{dr} \\ \frac{d\zeta_\beta}{dr} \\ \frac{d\zeta_\gamma}{dr} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \zeta_\alpha} & \frac{\partial F}{\partial \zeta_\beta} & \frac{\partial F}{\partial \zeta_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\zeta_\alpha}{dr} \\ \frac{d\zeta_\beta}{dr} \\ \frac{d\zeta_\gamma}{dr} \end{bmatrix} \quad [\text{A.19}]$$

Ο όρος $\frac{dF}{dr}$ είναι ανεξάρτητος για κάθε απεικόνιση της συνάρτησης $F(\zeta_\alpha, \zeta_\beta, \zeta_\gamma)$ επειδή

ισχύει :

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr} (\zeta_\alpha + \zeta_\beta + \zeta_\gamma) = 0 \quad [\text{A.20}]$$

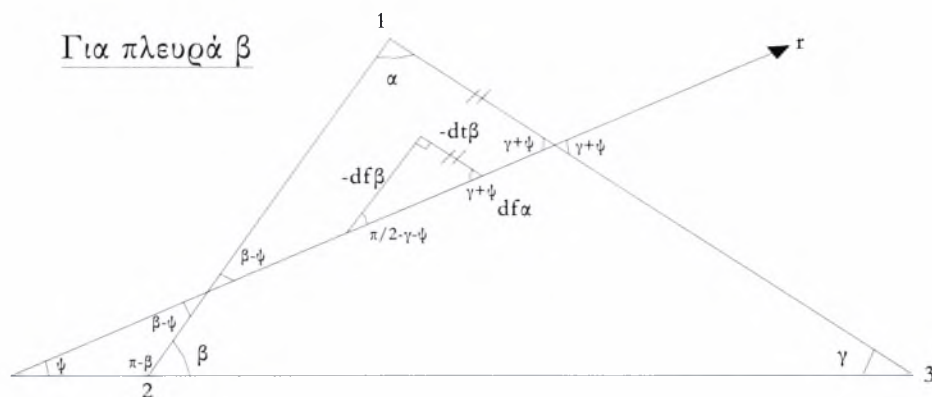


Σχήμα Α-6α: Παράγωγοι κατά διεύθυνση-πλευρά α

- Πλευρά α

Από το σχήμα Α-6α προκύπτουν:

$$\frac{dt_\alpha}{dr} = \cos \psi, \quad \frac{df_\alpha}{dr} = \sin \psi$$

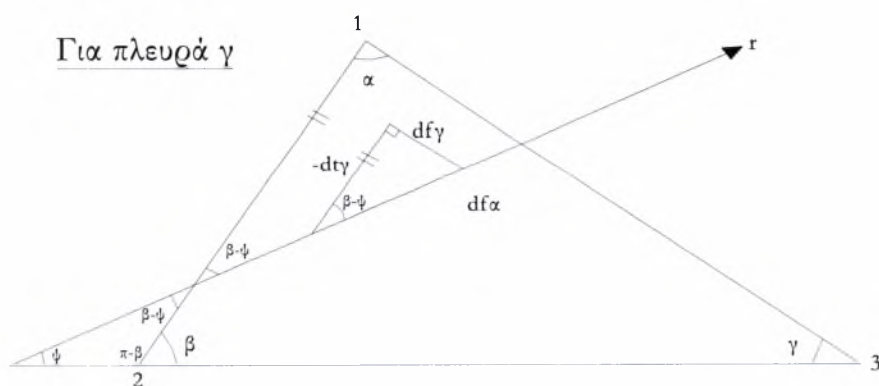


Σχήμα Α-6β: Παράγωγοι κατά διεύθυνση-πλευρά β

- Πλευρά β

Από το σχήμα Α-6β προκύπτουν:

$$\frac{dt_\beta}{dr} = -\cos(\gamma + \psi), \quad \frac{df_\beta}{dr} = -\sin(\gamma + \psi)$$



Σχήμα Α-6γ: Παράγωγοι κατά διεύθυνση-πλευρά γ

- Πλευρά γ

Από το σχήμα Α-6γ προκύπτουν:

$$\frac{dt_\gamma}{dr} = -\cos(\beta-\psi), \quad \frac{df_\gamma}{dr} = \sin(\beta-\psi)$$

Από όλα τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \begin{bmatrix} \frac{dt_\alpha}{dr} & \frac{dt_\beta}{dr} & \frac{dt_\gamma}{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\cos(\psi+\gamma) & -\cos(\beta-\psi) \end{bmatrix} = v(\psi) \\ \frac{df}{dr} &= \begin{bmatrix} \frac{df_\alpha}{dr} & \frac{df_\beta}{dr} & \frac{df_\gamma}{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\psi & -\sin(\psi+\gamma) & \sin(\beta-\psi) \end{bmatrix} = w(\psi) \end{aligned} \quad [A.21]$$

Ειδικότερα ισχύουν :

$$\frac{dt}{dr} = \begin{bmatrix} r_{//\alpha} \\ r_{//\beta} \\ r_{//\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v(\pi-\gamma) \\ v(\beta-\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c_\gamma & -c_\beta \\ -c_\gamma & 1 & c_\alpha \\ -c_\beta & c_\alpha & 1 \end{bmatrix} = C \quad [A.22]$$

$$\frac{dt}{df} = \begin{bmatrix} t_\alpha \\ t_\beta \\ t_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(\frac{\pi}{2}) \\ v(\frac{3\pi}{2}-\gamma) \\ v(\beta-\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\gamma & s_\beta \\ -s_\gamma & 0 & -s_\alpha \\ s_\beta & -s_\alpha & 0 \end{bmatrix} = S^t = -S \quad [A.23]$$

$$\frac{df}{dt} = \begin{bmatrix} t_{//\alpha} \\ t_{//\beta} \\ t_{//\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(0) \\ w(\pi-\gamma) \\ w(\beta-\pi) \end{bmatrix} = S \quad [A.24]$$

$$\frac{df}{df} = \begin{bmatrix} t_\alpha \\ t_\beta \\ t_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(\frac{\pi}{2}) \\ w(\frac{3\pi}{2}-\gamma) \\ w(\beta-\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = C \quad [A.25]$$

Τέλος οι συντελεστές του διαφορικού $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ ορίζονται ως :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\alpha} & \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} & \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\gamma} \\ \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\alpha} & \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\beta} & \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\gamma} \\ \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\alpha} & \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\beta} & \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial \eta_\gamma} \end{bmatrix} \quad [A.26]$$

Ο όρος $\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta}$ γράφεται :

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial \eta_\beta} = \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial f^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t^\alpha} \frac{\partial t^\alpha}{\partial \eta_\beta} \quad [A.27]$$

και λαμβάνοντας υπόψη τα παρακάτω :

$$\zeta_\alpha = \frac{f^\alpha}{h_\alpha} \Rightarrow \partial \zeta_\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{h_\alpha} \Rightarrow \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial f^\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \quad [A.28]$$

$$\eta_\beta = \frac{t^\beta}{l_\beta} \Rightarrow \frac{\partial \eta_\beta}{\partial t^\beta} = \frac{1}{l_\beta} \Rightarrow \frac{\partial t^\beta}{\partial \eta_\beta} = l_\beta \quad [A.29]$$

και από την σχέση [A.24], η σχέση [A.27] γράφεται :

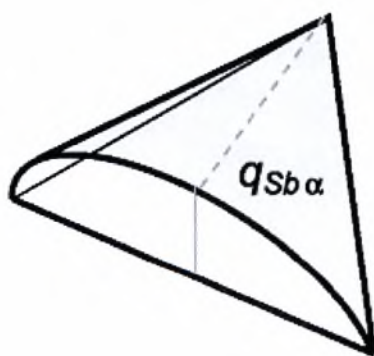
$$\frac{\partial \zeta_a}{\partial \eta_\beta} = \left(\frac{1}{h_a} \right) (s_\gamma) (l_\beta) = \left(\frac{l_\beta}{h_a} \right) (s_\gamma) = \frac{1}{s_\gamma} s_\gamma = 1 \quad [A.30]$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν όλοι οι όροι του διαφορικού $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad [A.31]$$

A.5 Συνολική ανοιγμένη παραμόρφωση στο φυσικό σύστημα

A.5.1 Συμμετρική καμπτική μορφή



Σχήμα Α-7: Συμμετρική Καμπτική Μορφή

Η συμμετρική καμπτική μορφή αντιπροσωπεύεται από ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Η κατακόρυφη μετατόπιση $w(Y_i)$ συναρτήσει της μεταβλητής Y_i , $Y_i \rightarrow l_i$, $i=\alpha,\beta,\gamma$ δίνεται από :

$$w_s(Y_i)=AY_i^2+BY_i+C \quad [A.32]$$

με τις πιο πάνω συνοριακές συνθήκες :

$$\begin{aligned} w_s(Y_i=0) &= 0 \\ w_s(Y_i=l_i) &= 0 \\ w'_s(Y_i=0) &= \frac{1}{2} \psi_{si} \end{aligned} \quad [A.33]$$

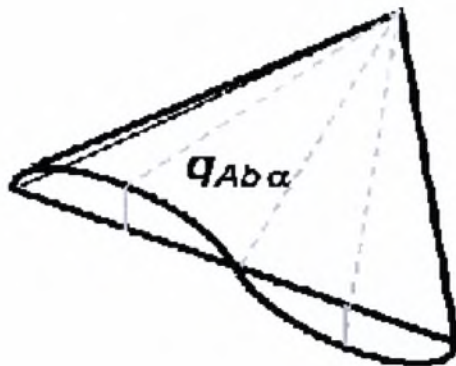
Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις [A.33] προκύπτει :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \psi_{si} \\ C &= 0 \\ A &= -\frac{1}{2} \frac{\psi_{si}}{l_i} \end{aligned} \quad [A.34]$$

Τελικά η σχέση [A.32] γράφεται :

$$w_s(Y_i) = -\frac{1}{2} \frac{\psi_{si}}{l_i} Y_i^2 + \frac{1}{2} \psi_{si} Y_i = \frac{1}{2} \left(-\frac{Y_i^2}{l_i} + Y_i \right) \psi_{si} \quad [A.35]$$

Α.5.2 Αντισυμμετρική καμπτική μορφή



Σχήμα Α-8: Συμμετρική Καμπτική Μορφή

Η αντισυμμετρική καμπτική μορφή αντιπροσωπεύεται από ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Η κατακόρυφη μετατόπιση $w(Y_i)$ συναρτήσει της μεταβλητής Y_i , $Y_i \rightarrow l_i$, $i=\alpha,\beta,\gamma$ δίνεται από :

$$w_A(Y_i) = AY_i^3 + BY_i^2 + CY_i + D \quad [A.36]$$

με τις πιο πάνω συνοριακές συνθήκες :

$$\begin{aligned} w_A(Y_i=0) &= 0 \\ w_A(Y_i=l_i) &= 0 \\ w'_A(Y_i=0) &= \frac{1}{2} \psi_{Ai}^b \\ w'_A(Y_i=l_i) &= \frac{1}{2} \psi_{Ai}^b \end{aligned} \quad [A.37]$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις [A.37] προκύπτει :

$$\begin{aligned}
 D &= 0 \\
 C &= \frac{1}{2} \psi_{Ai}^b \\
 B &= -\frac{3}{2} \frac{\psi_{Ai}^b}{l_i} \\
 A &= \frac{\psi_{Ai}^b}{l_i^2}
 \end{aligned}
 \tag{A.38}$$

Τελικά η σχέση [A.36] γράφεται :

$$\begin{aligned}
 w_A(Y_i) &= \frac{\psi_{Ai}^b}{l_i^2} Y_i^3 - \frac{3}{2} \frac{\psi_{Ai}^b}{l_i} Y_i^2 + \frac{1}{2} \psi_{Ai}^b Y_i = \\
 &= \frac{1}{2} \left(Y_i - \frac{3Y_i^2}{l_i} + \frac{2Y_i^3}{l_i^2} \right) \psi_{Ai}^b
 \end{aligned}
 \tag{A.39}$$

Η σχέση [A.39] με τη χρήση των συντεταγμένων ζ_i για την πλευρά α γράφεται :

$$w_{A\alpha} = \frac{1}{2} l_\alpha \zeta_\beta \zeta_\gamma (\zeta_\beta - \zeta_\gamma) \psi_{A\alpha}^b \tag{A.40}$$

Η σχέση αυτή προκύπτει χρησιμοποιώντας τις προαναφερθέντες σχέσεις [A.6] και [A.11] όπου το Y_α ταυτίζεται με το t^α

$$\begin{aligned}
 \frac{Y_\alpha}{l_\alpha} &= \eta_\alpha \\
 Y_\alpha &= \frac{f^\alpha}{\tan \beta} + \frac{f^\gamma}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta} (\cos \beta f^\alpha + f^\gamma)
 \end{aligned}
 \tag{A.41}$$

και $f^\alpha = 0$ και $\zeta_\alpha = 0$ γιατί βρισκόμαστε πάνω στην πλευρά α (Σχήμα A-6)

$$Y_a = \frac{f^\gamma}{\sin\beta} = \frac{f^\gamma l_a}{h_\gamma} = l_a \zeta_\gamma$$

$$\zeta_\gamma + \zeta_\beta = 0$$
[A.42]

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και οι κατακόρυφες μετατοπίσεις $w_{A\beta}, w_{A\gamma}$.

$$w_{A\beta} = \frac{1}{2} l_\beta \zeta_\gamma \zeta_\alpha (\zeta_\gamma - \zeta_\alpha) \psi_{A\beta}^b$$

$$w_{A\gamma} = \frac{1}{2} l_\gamma \zeta_\alpha \zeta_\beta (\zeta_\alpha - \zeta_\beta) \psi_{A\gamma}^b$$
[A.43]

Παράρτημα *B*

Αρχεία Εισαγωγής Δεδομένων

B.1 Εισαγωγή

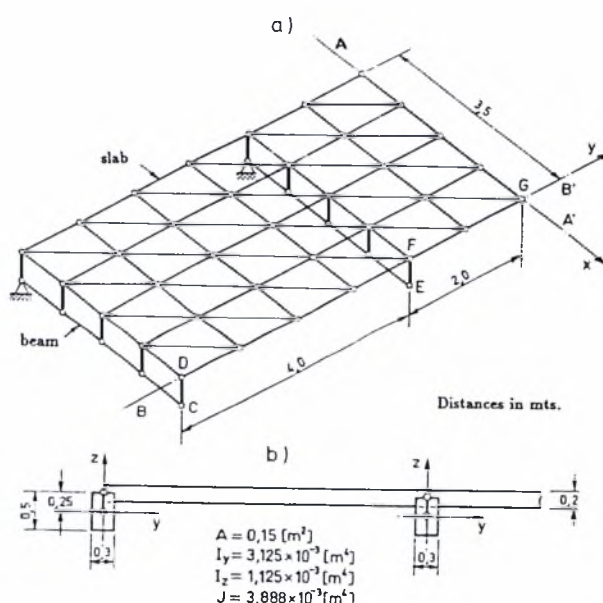
Πολλές φορές σε ερευνητικά προγράμματα όπου η εισαγωγή των δεδομένων γίνεται με το χέρι, υπάρχει τεράστια δυσκολία όταν θέλουμε να επιλύσουμε φορείς, όπου το πλήθος των κόμβων και των στοιχείων είναι σχετικά μεγάλο. Ο χρήστης πρέπει να διαθέτει τεράστια υπομονή αλλά και προσοχή ώστε η εισαγωγή των δεδομένων να γίνει σωστά και το δυνατόν συντομότερα. Παράλληλα υπάρχουν πάρα πολλοί φορείς των οποίων η γεωμετρία είναι αρκετά πολύπλοκη, πράγμα που καθιστά σχεδόν αδύνατη την εισαγωγή των δεδομένων με το χέρι. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ένα απλό κέλυφος μικρής καμπυλότητας (Παράδειγμα Scordelis). Ο χρήστης θα πρέπει να υπολογίσει για κάθε κόμβο τις συντεταγμένες επί της καμπυλωμένης γεωμετρίας του κελύφους και στη συνέχεια να τις πληκτρολογήσει στο αντίστοιχο αρχείο δεδομένων.

Εκτός όμως από τον μεγάλο κόπο που απαιτείται, πολλές φορές υπάρχουν δύσκολα σημεία στη γεωμετρία ενός φορέα στα οποία ο χρήστης μπορεί για παράδειγμα να πρέπει να πυκνώσει το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων ή να το αραιώσει ή ακόμα να πρέπει να παίζει με το σχήμα των στοιχείων, ώστε το μαθηματικό μοντέλο να περιγράφει τον πραγματικό φορέα με επαρκή ακρίβεια και με το δυνατό λιγότερους κόμβους και στοιχεία.

Για όλους τους παραπάνω λόγους όλα τα εμπορικά προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων που κυκλοφορούν στο εμπόριο διαθέτουν ένα γεννήτορα δικτύου (mesh generator). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκε η έκ-

δοση του προγράμματος MSC NASTRAN 4.5, επειδή η συγγραφή ενός προγράμματος για την δημιουργία του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων ξέφυγε από τα πλαίσια της. Πρόκειται για ένα πακέτο λογισμικού που διαθέτει μια πλούσια βιβλιοθήκη στοιχείων και έχει τη δυνατότητα να κάνει πολλών ειδών αναλύσεις. Διαθέτει εντολές σχεδιασμού CAD με την βοήθεια των οποίων η γεωμετρία του φορέα μπορεί εύκολα να εισαχθεί.

Υπάρχει επίσης η δυνατότητα εισαγωγής δεδομένων από αμιγώς σχεδιαστικά προγράμματα όπως το AutoCAD. Κατά την εισαγωγή των δεδομένων, αρχικά δίνεται η γεωμετρία του μοντέλου που θα διακριτοποιηθεί. Ακολουθεί η διακριτοποίηση, αφού πρώτα γίνει η επιλογή των κατάλληλων στοιχείων και των αντίστοιχων υλικών και καθοριστεί από τον χρήστη η πυκνότητα του δικτύου. Το πρόγραμμα λοιπόν στο αρχείο που δημιουργεί (export) περιέχει όλες τις συντεταγμένες των κόμβων οι οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν στο αρχείο εισαγωγής δεδομένων του Tric. Ένα παράδειγμα φορέα διακριτοποιημένου με το Nastran είναι αυτό του σχήματος Β-1.



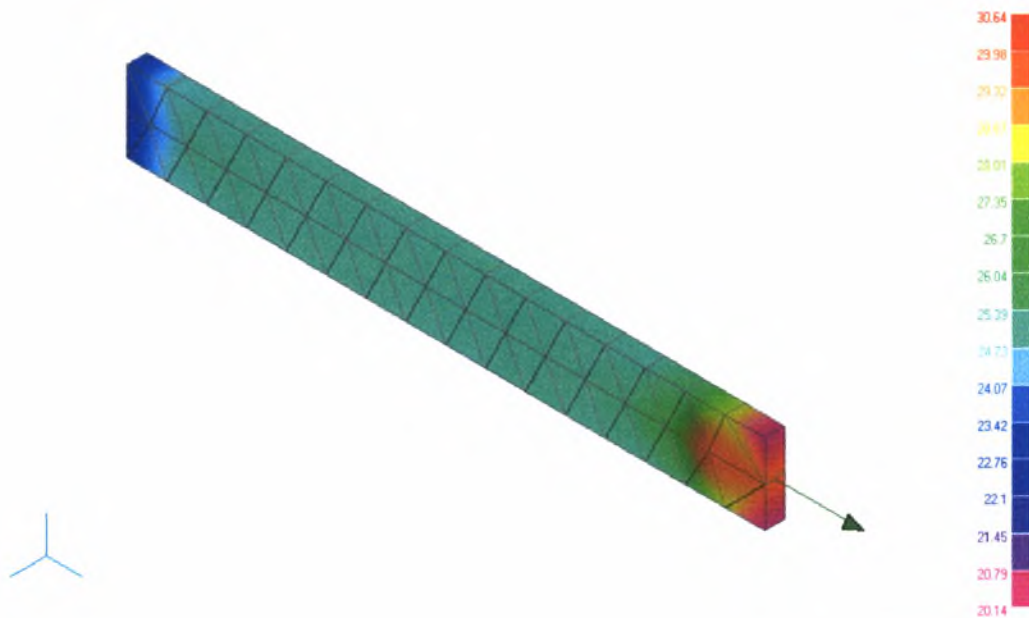
Σχήμα Β-1 : Ενισχυμένη γέφυρα με δοκούς

Ορισμένες από τις πολύ σημαντικές δυνατότητες που παρέχονται, είναι η δυνατότητα επαναρίθμησης των κόμβων έτσι ώστε η τελική αρίθμηση να είναι η βέλτιστη (μείωση του εύρους μη μηδενικών στοιχείων κατά μήκος της κύριας διαγωνίου του μητρώου δυσκαμψίας) καθώς και ο έλεγχος για την ύπαρξη διπλών κόμβων. Ο χρήστης τέλος μπορεί εύκολα να αλλάζει τις συνθήκες στήριξης καθώς και τις φορτίσεις ορίζοντας διαφορετικές περιπτώσεις (load set ή constraint set).

Η ενοποίηση των δύο προγραμμάτων βασίστηκε στη δυνατότητα που δίνει το NASTRAN να τυπώνει τα αρχεία δεδομένων του σε αρχεία κειμένου με την κατάληξη *.nas. Η δυνατότητα αυτή υπάρχει ώστε να μπορεί ο εκάστοτε χρήστης να παίρνει τα δεδομένα του NASTRAN και να τα χρησιμοποιεί σε άλλα προγράμματα που έχουν τη δυνατότητα να διαβάζουν αυτά τα αρχεία. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας γράφτηκε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα FORTRAN το οποίο «διαβάζει» τα αρχεία *.nas και τα τυπώνει σε μια μορφή τέτοια ώστε να μπορούν να διαβαστούν από τον υπάρχοντα κώδικα του TRIC. Το κέρδος από αυτή την διαδικασία είναι ότι δίνεται η δυνατότητα να επιλυθούν με το TRIC φορείς που έχουν αρκετά περίπλοκη γεωμετρία.

B.2 Παραδείγματα αρχείων εισαγωγής δεδομένων του MSC NASTRAN και τα αντίστοιχα του Tric.

Ο κώδικας επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε έχει τη δυνατότητα να μετατρέπει τα αρχεία εισόδου *.nas του MSC NASTRAN σε αρχεία εισόδου του TRIC, το οποίο εκτελεί στατικές γραμμικές και μη γραμμικές αναλύσεις κελυφών και πλακών. Παρακάτω υπάρχει παράδειγμα ενός προβόλου στο Nastran και στο πρόγραμμα του Tric. Παρουσιάζονται τα αρχεία εισαγωγής δεδομένων και στα δυο προγράμματα.



Σχήμα Β-2 : Προσομοίωση πακτωμένου προβόλου με το NASTRAN.

Το μήκος των πλευρών είναι $l = 3200 \text{ mm}$ και $b=200\text{mm}$, το πάχος του προβόλου είναι $t = 1 \text{ mm}$. Το υλικό από το οποίο ο πρόβολος είναι κατασκευασμένος έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, μέτρο διατμήσεως $G = 84000 \text{ N/mm}^2$, λόγος Poisson $\nu = 0.25$. Το πάχος και διαιρέθηκε σε 2 ισοπαχείς στρώσεις. Το φορτίο είναι οριζόντιο με τιμή 100Nt (μη γραμμικό φορτίο) στον κόμβο 34 όπως απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα.

B.3 Αρχείο Εισαγωγής Δεδομένων Tric

```
'ifunc',    'nonlinm'
'inat',     'comp'
'ishear',   .true.
'icorec',   .true.
'iprint',   .true.
'iprint2',  .true.
'ipost',    .false.
'iplane',   .false.
'ipatran',  .false.
'nmt',      2
51
```

```

64
'nlay(imt)', 2 2
0 0 0
200 0 0
400 0 0
600 0 0
800 0 0
1000 0 0
1200 0 0
1400 0 0
1600 0 0
1800 0 0
2000 0 0
2200 0 0
2400 0 0
2600 0 0
2800 0 0
3000 0 0
3200 0 0
0 100 0
200 100 0
400 100 0
600 100 0
800 100 0
1000 100 0
1200 100 0
1400 100 0
1600 100 0
1800 100 0
2000 100 0
2200 100 0
2400 100 0
2600 100 0
2800 100 0
3000 100 0
3200 100 0
0 200 0
200 200 0
400 200 0
600 200 0
800 200 0
1000 200 0
1200 200 0
1400 200 0
1600 200 0
1800 200 0
2000 200 0
2200 200 0
2400 200 0

```

2600	200	0		
2800	200	0		
3000	200	0		
3200	200	0		
1	1	1	19	18
2	2	19	1	2
3	1	2	20	19
4	2	20	2	3
5	1	3	21	20
6	2	21	3	4
7	1	4	22	21
8	2	22	4	5
9	1	5	23	22
10	2	23	5	6
11	1	6	24	23
12	2	24	6	7
13	1	7	25	24
14	2	25	7	8
15	1	8	26	25
16	2	26	8	9
17	1	9	27	26
18	2	27	9	10
19	1	10	28	27
20	2	28	10	11
21	1	11	29	28
22	2	29	11	12
23	1	12	30	29
24	2	30	12	13
25	1	13	31	30
26	2	31	13	14
27	1	14	32	31
28	2	32	14	15
29	1	15	33	32
30	2	33	15	16
31	1	16	34	33
32	2	34	16	17
33	1	18	36	35
34	2	36	18	19
35	1	19	37	36
36	2	37	19	20
37	1	20	38	37
38	2	38	20	21
39	1	21	39	38
40	2	39	21	22
41	1	22	40	39
42	2	40	22	23
43	1	23	41	40
44	2	41	23	24
45	1	24	42	41


```

46  2  42  24  25
47  1  25  43  42
48  2  43  25  26
49  1  26  44  43
50  2  44  26  27
51  1  27  45  44
52  2  45  27  28
53  1  28  46  45
54  2  46  28  29
55  1  29  47  46
56  2  47  29  30
57  1  30  48  47
58  2  48  30  31
59  1  31  49  48
60  2  49  31  32
61  1  32  50  49
62  2  50  32  33
63  1  33  51  50
64  2  51  33  34

```

```

3

```

```

    1    1    1    1    1    1    1
  18    1    1    1    1    1    1
 35    1    1    1    1    1    1

```

```

'Mat 1 - layer 1'

```

```

'theta,th12,hl',      0.00,90., 0.500000

```

```

'young1,young2,young3' 210000.00,210000.00,210000.00,

```

```

'g12,g13,g23'      84000.0,84000.0,84000.0,

```

```

'poi12,poi13,poi23'  .250, .250, .250,

```

```

'Mat 1 - layer 2'

```

```

'theta,th12,hl',      0.00,90., 0.500000

```

```

'young1,young2,young3' 210000.00,210000.00,210000.00,

```

```

'g12,g13,g23'      84000.0,84000.0,84000.0,

```

```

'poi12,poi13,poi23'  .250, .250, .250,

```

```

'Mat 2 - layer 1'

```

```

'theta,th12,hl',      0.00,90., 0.500000

```

```

'young1,young2,young3' 210000.00,210000.00,210000.00,

```

```

'g12,g13,g23'      84000.0,84000.0,84000.0,

```

```

'poi12,poi13,poi23'  .250, .250, .250,

```

```

'Mat 2 - layer 2'

```

```

'theta,th12,hl',      0.00,90., 0.500000

```

```

'young1,young2,young3' 210000.00,210000.00,210000.00,

```

```

'g12,g13,g23'      84000.0,84000.0,84000.0,

```

```

'poi12,poi13,poi23'  .250, .250, .250,

```

```

'iload',      'concl'

```

```

'fload,nodel,idxl',  -100,34,2

```

```

'nonldat',      15,30,0.001,'snr',1.0

```

```

'ilarge',      .true.

```

B.4 Αρχείο Εισαγωγής Δεδομένων Nastran.

```

** *****
** Written by : MSC/NASTRAN for Windows
** Version   : 6.00
** From Model : C:\Documents and Settings\Kostas Nikolaou\My Documents\University of Thessaly\DIplomatiki\probolos.MOD
** Date      : Sat Apr 24 15:19:09 2004
** *****
**
**HEADING
askisi1
**NODE, NSET=GLOBAL 0    0    0
1,    200.,    0.,    0.,
2,    400.,    0.,    0.,
3,    600.,    0.,    0.,
4,    800.,    0.,    0.,
5,   1000.,    0.,    0.,
6,   1200.,    0.,    0.,
7,   1400.,    0.,    0.,
8,   1600.,    0.,    0.,
9,   1800.,    0.,    0.,
10,  2000.,    0.,    0.,
11,  2200.,    0.,    0.,
12,  2400.,    0.,    0.,
13,  2600.,    0.,    0.,
14,  2800.,    0.,    0.,
15,  3000.,    0.,    0.,
16,  3200.,    0.,    0.,
17,    0.,   100.,    0.,
18,   200.,   100.,    0.,
19,   400.,   100.,    0.,
20,   600.,   100.,    0.,
21,   800.,   100.,    0.,
22,  1000.,   100.,    0.,
23,  1200.,   100.,    0.,
24,  1400.,   100.,    0.,
25,  1600.,   100.,    0.,
26,  1800.,   100.,    0.,
27,  2000.,   100.,    0.,
28,  2200.,   100.,    0.,
29,  2400.,   100.,    0.,
30,  2600.,   100.,    0.,
31,  2800.,   100.,    0.,
32,  3000.,   100.,    0.,
33,  3200.,   100.,    0.,
34,    0.,   200.,    0.,
35,   200.,   200.,    0.,

```

36,	400.,	200.,	0.,
37,	600.,	200.,	0.,
38,	800.,	200.,	0.,
39,	1000.,	200.,	0.,
40,	1200.,	200.,	0.,
41,	1400.,	200.,	0.,
42,	1600.,	200.,	0.,
43,	1800.,	200.,	0.,
44,	2000.,	200.,	0.,
45,	2200.,	200.,	0.,
46,	2400.,	200.,	0.,
47,	2600.,	200.,	0.,
48,	2800.,	200.,	0.,
49,	3000.,	200.,	0.,
50,	3200.,	200.,	0.,
1,	0.,	0.,	0.,
2,	0.,	200.,	0.
3,	0.,	400.,	0.
4,	117.15733,	200.,	0.
5,	200.,	0.,	0.
6,	200.,	400.,	0.
7,	302.9438,	200.,	0.
8,	400.,	0.,	0.
9,	400.,	400.,	0.
10,	500.50518,	200.,	0.
11,	600.,	0.,	0.
12,	600.,	400.,	0.
13,	700.08679,	200.,	0.
14,	800.,	0.,	0.
15,	800.,	400.,	0.
16,	900.01503,	200.,	0.
17,	1000.,	0.,	0.
18,	1000.,	400.,	0.
19,	1100.0027,	200.,	0.
20,	1200.,	0.,	0.
21,	1200.,	400.,	0.
22,	1300.0006,	200.,	0.
23,	1400.,	0.,	0.
24,	1400.,	400.,	0.
25,	1500.0003,	200.,	0.
26,	1600.,	0.,	0.
27,	1600.,	400.,	0.
28,	1700.0006,	200.,	0.
29,	1800.,	0.,	0.
30,	1800.,	400.,	0.
31,	1900.0027,	200.,	0.
32,	2000.,	0.,	0.
33,	2000.,	400.,	0.
34,	2100.015,	200.,	0.

35,	2200.,	0.,	0.
36,	2200.,	400.,	0.
37,	2300.0868,	200.,	0.
38,	2400.,	0.,	0.
39,	2400.,	400.,	0.
40,	2500.5052,	200.,	0.
41,	2600.,	0.,	0.
42,	2600.,	400.,	0.
43,	2702.9438,	200.,	0.
44,	2800.,	0.,	0.
45,	2800.,	400.,	0.
46,	2917.1573,	200.,	0.
47,	3000.,	0.,	0.
48,	3000.,	400.,	0.
49,	3200.,	0.,	0.
50,	3200.,	200.,	0.
51,	3200.,	400.,	0.

*ELEMENT, TYPE=S3R, ELSET=P1

1,	50,	51,	48
2,	50,	48,	46
3,	47,	49,	50
4,	47,	50,	46
5,	46,	48,	45
6,	46,	45,	43
7,	44,	47,	46
8,	44,	46,	43
9,	43,	45,	42
10,	43,	42,	40
11,	41,	44,	43
12,	41,	43,	40
13,	40,	42,	39
14,	40,	39,	37
15,	38,	41,	40
16,	38,	40,	37
17,	37,	39,	36
18,	37,	36,	34
19,	35,	38,	37
20,	35,	37,	34
21,	34,	36,	33
22,	34,	33,	31
23,	32,	35,	34
24,	32,	34,	31
25,	31,	33,	30
26,	31,	30,	28
27,	29,	32,	31
28,	29,	31,	28
29,	28,	30,	27
30,	28,	27,	25
31,	26,	29,	28

32, 26, 28, 25
 33, 25, 27, 24
 34, 25, 24, 22
 35, 23, 26, 25
 36, 23, 25, 22
 37, 22, 24, 21
 38, 22, 21, 19
 39, 20, 23, 22
 40, 20, 22, 19
 41, 19, 21, 18
 42, 19, 18, 16
 43, 17, 20, 19
 44, 17, 19, 16
 45, 16, 18, 15
 46, 16, 15, 13
 47, 14, 17, 16
 48, 14, 16, 13
 49, 13, 15, 12
 50, 13, 12, 10
 51, 11, 14, 13
 52, 11, 13, 10
 53, 10, 12, 9
 54, 10, 9, 7
 55, 8, 11, 10
 56, 8, 10, 7
 57, 7, 9, 6
 58, 7, 6, 4
 59, 5, 8, 7
 60, 5, 7, 4
 61, 4, 6, 3
 62, 4, 3, 2
 63, 1, 5, 4
 64, 1, 4, 2

*ELSET, ELSET=OUT_PLT, GENERATE

1,64,1

** MSC/NASTRAN for Windows Property 1 : povolo

*SHELL SECTION, ELSET=P1, MATERIAL=M1

100.,

** MSC/NASTRAN for Windows Material 1 : xalibas

*MATERIAL, NAME=M1

*ELASTIC, TYPE=ISOTROPIC

210000., 0.25, 0.

** Load Step 1 -----

*STEP, INC=100

L1

*STATIC

*NODE PRINT

CF

```
RF
U
*EL PRINT, ELSET=OUT_PLT, POSITION=CENTROIDAL
SF
S
SINV
*EL PRINT, ELSET=OUT_PLT, POSITION=NODES
SF
S
SINV
*FILE FORMAT, ASCII
*NODE FILE
CF
RF
U
*EL FILE, ELSET=OUT_PLT, POSITION=CENTROIDAL
SF
S
SINV
*EL FILE, ELSET=OUT_PLT, POSITION=NODES
SF
S
SINV
*BOUNDARY, OP=NEW
1, 1
1, 2
1, 3
1, 4
1, 5
1, 6
2, 1
2, 2
2, 3
2, 4
2, 5
2, 6
3, 1
3, 2
3, 3
3, 4
3, 5
3, 6
4, 3
5, 3
6, 3
7, 3
8, 3
9, 3
10, 3
```

11, 3
12, 3
13, 3
14, 3
15, 3
16, 3
17, 3
18, 3
19, 3
20, 3
21, 3
22, 3
23, 3
24, 3
25, 3
26, 3
27, 3
28, 3
29, 3
30, 3
31, 3
32, 3
33, 3
34, 3
35, 3
36, 3
37, 3
38, 3
39, 3
40, 3
41, 3
42, 3
43, 3
44, 3
45, 3
46, 3
47, 3
48, 3
49, 3
50, 3
51, 3
*CLOAD, OP=NEW
50, 1, 100.
*END STEP

Βιβλιογραφία

- [1] Argyris J.H., Balmer H., Doltsinis J. St., Dunne P.C., Haase M., Kleiber M., Malejannakis G. A., Mlejnek H. P., Muller M., Scharf D. W., Finite element method - the natural approach-, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18:1-106, 1979.
- [2] Argyris J.H., Boni B., Hinderlang U. and Kleiber M., Finite element analysis of two - and three dimensional elasto-plastic frames - The natural Approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 35 (1982) 221-248.
- [3] Argyris J.H., Papadrakakis M., Apostolopoulou C., Koutsourelakis S., The TRIC shell element: theoretical and numerical investigation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182 (2000) 217-245, 1999.
- [4] Argyris J.H., Papadrakakis M., Karapitta L., Elastoplastic Analysis of Shells with the Triangular Element TRIC, 4th Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, IASS-IACM 2000, Chania-Crete, Greece.
- [5] Argyris J.H., Scharf D.W., Spooner J.B., Die elastoplastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua, Report Nr. 46, University of Stuttgart, 1968.
- [6] Argyris J., Tenek L., Olofsson L., TRIC: a simple but sophisticated 3-node triangular element based on 6 rigid body and 12 straining modes for fast computational of arbitrary isotropic and laminated composite shells, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 145 (1997) 11-85.
- [7] Argyris J., Tenek L., Papadrakakis M., Apostolopoulou C., Postbuckling performance of the TRIC natural mode triangular element for iso-

- tropic and laminated composite shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 166 (1998) 211-231, 1998.
- [8] Bathe K.J, Finite Element Procedures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
 - [9] Bathe K.J, Finite Element Procedures for Solids and Structures-Nonlinear Analysis, MIT Video Course.
 - [10] Crisfield M.A., Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1, John Wiley & Sons.
 - [11] D.Lam, K.K. Liu, E.S. Law, T. Belytschko, Resultant-stress degenerated-shell element, Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 55 (1986) 259-300
 - [12] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, Computational Inelasticity, 1998.J. H. Argyris, H. Balmer, M. Kleiber and U. Hindenlang, Natural description of large inelastic deformation for shells of arbitrary shape-application of TRUMP element, Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg 22, 361-389, 1980.
 - [13] J. C. Simo and J. Kennedy, on a stress resultants geometrically exact shell model. Part V, Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms Comp. Meth, Appl. Mech. Eng. 96,133-171, 1992
 - [14] J. H. Argyris, L. Tenek, an efficient and locking free flat anisotropic plate and shell triangular element, Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg. 118, 63-119, 1994.
 - [15] J. H. Argyris, L. Tenek, M. Papadrakakis and C. Apostolopoulou, Post-buckling performance of the TRIC natural mode triangular element for isotropic and laminated composite shells, Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg. 166, 211-231, 1998.
 - [16] J. H. Argyris, M. Haase and H.-P. Mlejnek, On an unconventional but natural formation of the stiffness matrix, Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg. 22, 371-403, 1977.

- [17] J. H. Argyris, P. C. Dunne, G. A. Malejanakis and E. Schekle, A simple triangular facet shell element with applications to linear and nonlinear equilibrium and inelastic stability, *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engrg.* 10, 371-403, 1977.
- [18] John Argyris, Lazarus Tenek, Manolis Papadrakakis, Constantina Apostolopoulou. "Postbuckling performance of the TRIC natural mode triangular element for isotropic and laminated composite shells"
- [19] J. C. Simo and J. Kennedy, On a stress resultants geometrically exact shell model. Part V, Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 96,133-171, 1992
- [20] J. C. Simo, D.D. Fox, On a stress resultant geometrically exact shell element, part II: The linear theory; computational aspects,*Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.* 73 (1989) 53-92.
- [21] J.Soric, U.Montag, W.B.Kraetzig, An efficient formulation of integration algorithms for elastoplastic shell analysis based on layered finite element approach,*Comp.Meth. Appl. Mech. & Engrg.* 148, 315-328, 1997
- [22] J. Soric, U. Montag and W. B. Kraetzig, On the increase of computational algorithm efficiency for elastoplastic shell analysis, *Engineering Computations*, 14, 75-97, 1997
- [23] H. Argyris, D. W. Scharpf, J. B. Spooner, Technical Report, No. 46, 1968, University of Stuttgart, Germany.
- [24] Βαλιάσης Θ., Επιφανειακοί Φορείς Θεωρία και Μέθοδοι Επίλυσης, Θεσσαλονίκη 2000
- [25] Γκισάκης Α., Μη γραμμική ανάλυση - γεωμετρική και υλικού - κελυφών ενισχυμένων με δοκούς με τα πεπερασμένα στοιχεία TRIC και BEC Προπτυχιακή Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Νοέμβριος 2001.

- [26] Ζιωτόπουλος Α., Ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων πολυστρωματικών κελυφών ενισχυμένων με δοκούς, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Δομοστατικής ΕΜΠ, Ιούλιος 2001.
- [27] K. J. Bathe, E.N. Dvorkin, A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components, Num. Meth. Eng. 22 (1986) 697-722
- [28] Leone Corradi, Nicola Panzeri, Post-collapse analysis of plates and shells based on a rigid-plastic version of the TRIC element. Department of Structural Engineering, Politecnico, May 2003
- [29] Nonlinear analysis of shells by finite elements /edited by F. G. Rammerstorfer Wien ; New York: Springer - Verlag, c1992. Courses and lectures /International Centre for Mechanical Sciences ; no. 328
- [30] Owen D.R.J., Hinton E., Finite Elements In Plasticity- theory and practice, Pineridge Press Limited, Swansea U.K.
- [31] Papadrakakis M., Karamanos S.A., A simple and efficient method for the limit elasto-plastic analysis of plane frames, Computational Mechanics Journal, V8, 235-248, 1991.
- [32] Παπαδρακάκης Μανόλης, Μη γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία, εκδόσεις ΕΜΠ, 1998
- [33] Παπαδρακάκης Μανόλης, Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, εκδόσεις ΕΜΠ, 1996.
- [34] Peric D, Owen DRJ. The Morley thin shell finite element for large deformation problems: Simplicity versus sophistication. In: Bicanic E, editor. Nonlinear engineering computations. Swansea: Pineridge Press, 1991.
- [35] P.Wriggers, E. Eberlein and S.Reese, A comparison of three dimensional continuum and shell elements for finite plasticity, Int. J. Solids Struct., 33, 3309-3326, 1996

- [36] Roehl DdM. Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua, Rep. No. 16. Inst. F. Baustatik, University of Stuttgart, 1994
- [37] T. Belytschko, I. Leviathan, Physical stabilization of the 4-node shell element with one-point quadrature, Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 113 (1994) 321-350.
- [38] J.H. Argyris et al. / Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 182 (2000) 217-245
- [39] Tenek L.T., Argyris J.H., Finite Element Analysis for Composite Structures, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [40] T.J.R. Hughes, W.K. Liu, Nonlinear Finite element analysis of shells, part II: two-dimensional shells, Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 27 (1981) 167-182
- [41] U. Montag, W.B. Kraetzig and J. Soric, Increasing solution stability for finite – element modeling of elasto – plastic shell response. Adv. in Engrg Soft. 30, 607-619, 1999



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074176

